

$r(t)$ in integraler Darstellung

Zafer Sah

30 Oktober 2018

Inhaltsverzeichnis

1	r(t) in integraler Darstellung	3
1.1	Einleitung	3
1.2	Herleitung	4
1.3	Eigenschaften	5
1.4	Numerische Berechnung	7
1.5	Planetenbahnen	8
2	Anhang	10

1 $r(t)$ in integraler Darstellung

1.1 Einleitung

In jedem elementaren Physikbuch findet man die folgende Gleichung für die Gravitationsbeschleunigung einer Zentralmasse M .

$$\vec{a}(r) = -\frac{\gamma M}{r^2} \cdot \vec{e}_r \quad (1)$$

Läßt man eine Probemasse m im Feld dieser Zentralmasse M zum Zeitpunkt $t = 0$ von der Koordinate r_0 aus mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ frei fallen so erhält man eine Gleichung die ebenfalls in vielen Büchern zu finden ist.

$$\vec{v}(r) = -\sqrt{\frac{2 \gamma M}{r} - \frac{2 \gamma M}{r_0}} \cdot \vec{e}_r \quad (2)$$

Eine weitere Integration führt uns dann zu der folgenden $r(t)$ Darstellung die nicht mehr so häufig anzutreffen ist.

$$r(t) = r_0 \cdot \cos \left(\sqrt{\frac{2 \gamma M}{r_0^3}} \cdot t - \sqrt{\frac{r(t)}{r_0}} \cdot \sqrt{1 - \frac{r(t)}{r_0}} \right)^2 \quad (3)$$

Wir sehen hier dass eine explizite Darstellung von $r(t)$ nicht möglich ist und daher $r(t)$ numerisch berechnet werden muß. Doch dieser Umstand ist sehr unbefriedigend. Wenn die Gleichungen (1) und (2) so grundlegend sind kann man vermuten, dass sich $r(t)$ zumindestens harmonische schreiben lässt. Ich zeige zuerst dass man in der Tat Gleichung (3) auch folgendermaßen schreiben kann :

$$r(t) = r_0 \cdot \cos \left(\int_0^t \sqrt{\frac{2 \gamma M}{r_0^2 r(t') + r_0 r(t')^2}} dt' \right) \quad (4)$$

Danach werde ich kurz die numerische Berechnung vorstellen um anschließend Gleichung (4) auf die Planetenbewegungen anzuwenden.

1.2 Herleitung

Sei Gleichung (3) schon bewiesen. Setzen wir $\alpha = \sqrt{\frac{2 \gamma M}{r_0^3}} \cdot t - \sqrt{\frac{r(t)}{r_0}} \cdot \sqrt{1 - \frac{r(t)}{r_0}}$

so bekommen wir $r(t) = r_0 \cdot \cos(\alpha)^2$

$$\textbf{Ansatz: } \cos(\alpha)^2 = \cos(\beta) \quad (5)$$

Denn zu jedem α lässt sich ein β derart finden so dass Gleichung (5) gilt. Es gilt nun dieses β zu bestimmen.

$$\beta = \arccos(\cos(\alpha)^2) \quad \textbf{Substitution: } x = \cos(\alpha)^2$$

$$\beta = \arccos(x) = \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy \quad \text{laut Definition von Arkuscosinus.}$$

$$\textbf{Substitution: } y = \cos(u)^2 \quad dy = -2 \cdot \sin(u) \cdot \cos(u) \cdot du$$

Integrationsgrenzen: $y = 1 \Rightarrow u = 0$ und $y = x$ mit $\cos(u)^2 = \cos(\alpha)^2 \Rightarrow u = \alpha$

$$\beta = \int_\alpha^0 \frac{-2 \cdot \sin(u) \cdot \cos(u)}{\sqrt{1 - \cos(u)^4}} du = \int_0^\alpha \frac{2 \cdot \sin(u) \cdot \cos(u)}{\sqrt{(1 - \cos(u)^2) \cdot (1 + \cos(u)^2)}} du$$

$$\beta = \int_0^\alpha \frac{2 \cdot \cos(u)}{\sqrt{(1 + \cos(u)^2)}} du \quad \textbf{Substitution: } u = \sqrt{\frac{2 \gamma M}{r_0^3}} \cdot t' - \sqrt{\frac{r(t')}{r_0}} \cdot \sqrt{1 - \frac{r(t')}{r_0}}$$

Integrationsgrenzen: $u = 0 \Rightarrow t' = 0$ und $u = \alpha \Rightarrow t' = t$

$$\text{wobei } u = \sqrt{\frac{2 \gamma M}{r_0^3}} \cdot t' - \sqrt{\frac{r(t')}{r_0}} \cdot \sqrt{1 - \frac{r(t')}{r_0}} = \alpha = \sqrt{\frac{2 \gamma M}{r_0^3}} \cdot t - \sqrt{\frac{r(t)}{r_0}} \cdot \sqrt{1 - \frac{r(t)}{r_0}}$$

benutzt wurde. Setzen wir alles ein so folgt für β

$$\beta = \int_0^t \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{r(t')}{r_0}}}{\sqrt{1 + \frac{r(t')}{r_0}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2 \gamma M}{r_0 r(t')^2}} \cdot dt' = \int_0^t \sqrt{\frac{2 \gamma M}{r_0^2 r(t') + r_0 r(t')^2}} dt' \quad (6)$$

Damit folgt aus (5) und (6) die (4) $r(t) = r_0 \cdot \cos\left(\int_0^t \sqrt{\frac{2 \gamma M}{r_0^2 r(t') + r_0 r(t')^2}} dt'\right)$

1.3 Eigenschaften

Offensichtlich beschreibt Gleichung (4) eine Drehung wobei der folgende Term die dazugehörige Winkelgeschwindigkeit ist.

$$\omega_s(r(t)) = \sqrt{\frac{2 \gamma M}{r_0^2 r(t) + r_0 r(t)^2}} \quad (7)$$

Um diese Rotation darzustellen füge ich eine neue w-Achse ein, die keine räumliche Achse darstellt. siehe Abbildung 1
Da sich das innere Gravitationsfeld mit komplexen Zahlen beschreiben lässt, könnte man vermuten dass die r-w-Ebene der komplexen Zahlenebene entspricht. Es ist aber im Rahmen dieser Arbeit ausreichend wenn wir folgendermassen ansetzen:

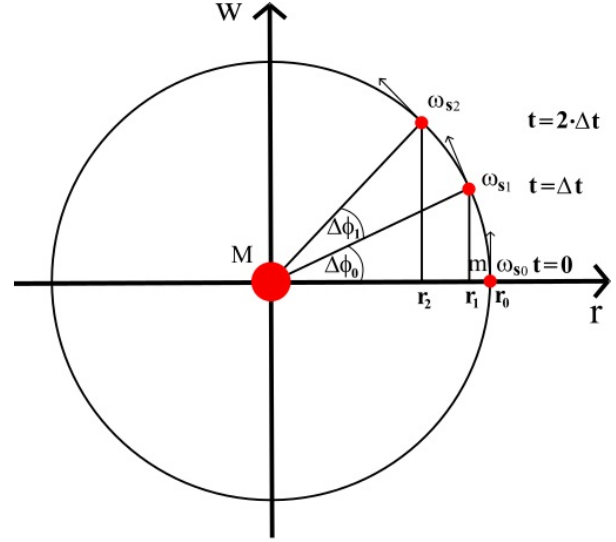


Abbildung 1

$$\vec{R}(t) = r_0 \cdot \cos \left(\int_0^t \sqrt{\frac{2 \gamma M}{r_0^2 r + r_0 r^2}} dt' \right) \cdot \vec{e}_r + r_0 \cdot \sin \left(\int_0^t \sqrt{\frac{2 \gamma M}{r_0^2 r + r_0 r^2}} dt' \right) \cdot \vec{e}_w \quad (8)$$

Wir können Gleichung (8) differenzieren

$$\frac{d\vec{R}(t)}{dt} = -r_0 \cdot \sin \left(\int_0^t \sqrt{\frac{2 \gamma M}{r_0^2 r + r_0 r^2}} dt' \right) \cdot \frac{d}{dt} \left(\int_0^t \sqrt{\frac{2 \gamma M}{r_0^2 r + r_0 r^2}} dt' \right) \cdot \vec{e}_r$$

$$+ r_0 \cdot \cos \left(\int_0^t \sqrt{\frac{2 \gamma M}{r_0^2 r + r_0 r^2}} dt' \right) \cdot \frac{d}{dt} \left(\int_0^t \sqrt{\frac{2 \gamma M}{r_0^2 r + r_0 r^2}} dt' \right) \cdot \vec{e}_w$$

$$\frac{d\vec{R}(t)}{dt} = -r_0 \cdot \sin \left(\int_0^t \sqrt{\frac{2 \gamma M}{r_0^2 r + r_0 r^2}} dt' \right) \cdot \sqrt{\frac{2 \gamma M}{r_0^2 r + r_0 r^2}} \cdot \vec{e}_r$$

$$+ r_0 \cdot \cos \left(\int_0^t \sqrt{\frac{2 \gamma M}{r_0^2 r + r_0 r^2}} dt' \right) \cdot \sqrt{\frac{2 \gamma M}{r_0^2 r + r_0 r^2}} \cdot \vec{e}_w$$

$$\frac{d\vec{R}(t)}{dt} = -r_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{r^2}{r_0^2}} \cdot \sqrt{\frac{2 \gamma M}{r_0^2 r + r_0 r^2}} \cdot \vec{e}_r + r \cdot \sqrt{\frac{2 \gamma M}{r_0^2 r + r_0 r^2}} \cdot \vec{e}_w$$

$$\frac{d\vec{R}(t)}{dt} = -\sqrt{\frac{2 \gamma M}{r} - \frac{2 \gamma M}{r_0}} \cdot \vec{e}_r + \sqrt{\frac{2 \gamma M}{r_0} - \frac{2 \gamma M}{r_0 + r}} \cdot \vec{e}_w \quad (9)$$

Für $t = 0$ und $r(t) = r_0$ folgt aus Gleichung (9)

$$\frac{d\vec{R}(t)}{dt} = -0 \cdot \vec{e}_r + \sqrt{\frac{\gamma M}{r_0}} \cdot \vec{e}_w$$

Die Darstellung des freien Falles als Rotation hat die Konsequenz, dass die frei fallende Probemasse auch zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Geschwindigkeit haben muß die nicht räumlich ist. Differenzieren wir Gleichung (9) so erhalten wir

$$\frac{d^2\vec{R}(t)}{dt^2} = -\frac{\gamma M}{r^2} \cdot \vec{e}_r - \frac{\gamma M}{(r_0 + r)^2} \cdot \sqrt{\frac{r_0^2 - r^2}{r^2}} \cdot \vec{e}_w \quad (10)$$

1.4 Numerische Berechnung

Die betrachtete Probemasse m befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ an der Koordinate $r(t = 0) = r_0$ und hat die räumliche Geschwindigkeit $v(t = 0) = 0$. Wir möchten für $0 < t < t_a$ (wobei t_a die Aufschlagzeit der Probemasse m auf der gravitierenden Masse M sein soll) die Ortskoordinate $r(t)$ berechnen. Siehe Abbildung 1

Wir zerlegen die Zeit t in n -Teilintervalle. Sei also $t = n \cdot \Delta t$. Für den Beginn des k -ten Intervalls $I_k = [k \cdot \Delta t, (k + 1) \cdot \Delta t[$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq k < n$ sei die Ortskoordinate r_k schon gegeben. Damit berechnen wir als erstes die Winkelgeschwindigkeit

$\omega_{sk} = \sqrt{\frac{2 \gamma M}{r_0^2 r_k + r_0 r_k^2}}$ die wir für das Intervall I_k als konstant annehmen. Hieraus berechnen wir den im Intervall I_k überstrichenen Winkel $\Delta\phi_k = \omega_{sk} \cdot \Delta t$. Damit berechnen wir dann die Ortskoordinate zu Beginn des nächsten Intervalles $r_{k+1} = r_0 \cdot \cos\left(\sum_{i=0}^k \Delta\phi_i\right)$ usw.

$$k = 0 \Rightarrow r = r_0 \Rightarrow \omega_{s0} = \sqrt{\frac{\gamma M}{r_0^3}} \Rightarrow \Delta\phi_0 = \omega_{s0} \cdot \Delta t \Rightarrow r_1 = r_0 \cdot \cos(\Delta\phi_0)$$

$$k = 1 \Rightarrow r = r_1 \Rightarrow \omega_{s1} = \sqrt{\frac{2 \gamma M}{r_0^2 r_1 + r_0 r_1^2}} \Rightarrow \Delta\phi_1 = \omega_{s1} \cdot \Delta t \Rightarrow r_2 = r_0 \cdot \cos(\Delta\phi_0 + \Delta\phi_1)$$

⋮

$$k = n - 1 \Rightarrow r = r_{n-1} \Rightarrow \omega_{s(n-1)} = \sqrt{\frac{2 \gamma M}{r_0^2 r_{n-1} + r_0 r_{n-1}^2}} \Rightarrow \Delta\phi_{n-1} = \omega_{s(n-1)} \cdot \Delta t$$

$$\Rightarrow r_n = r_0 \cdot \cos(\Delta\phi_0 + \Delta\phi_1 + \Delta\phi_2 + \dots + \Delta\phi_{n-1})$$

Das so berechnete r_n stimmt mit der tatsächlichen Ortskoordinate $r(t)$ umso besser überein je größer n oder je kleiner Δt ist.

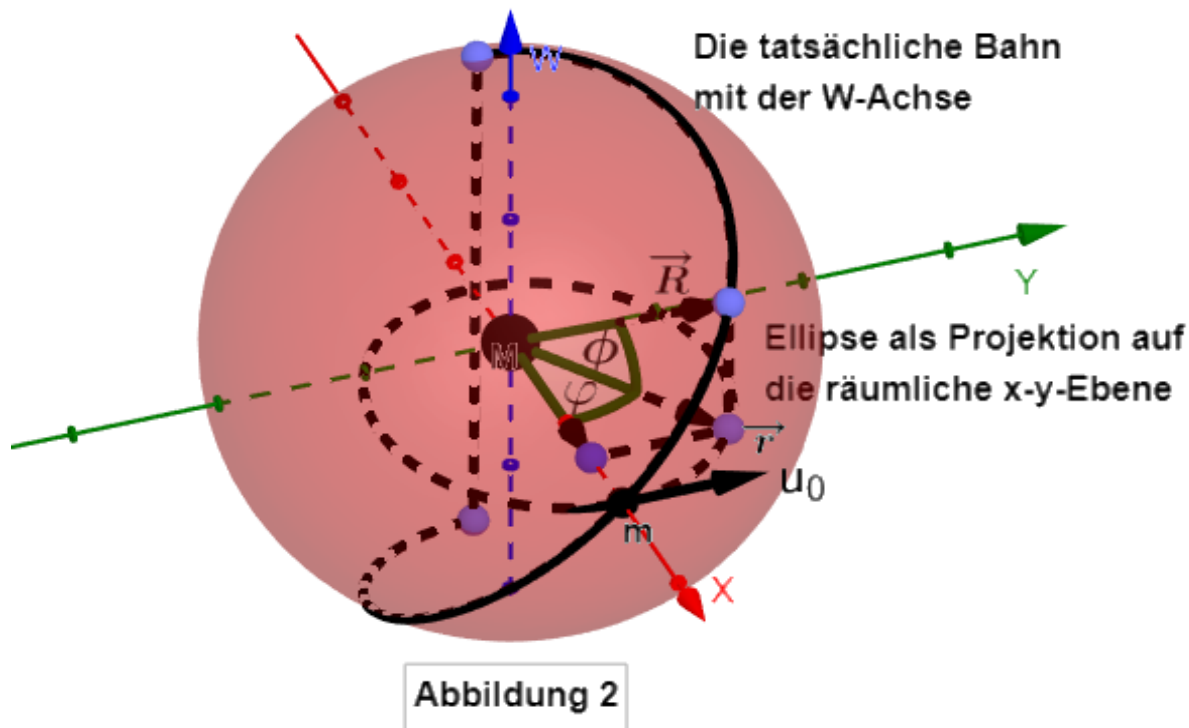
Das entspricht ja dann wieder Gleichung (4).

$$r(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r_0 \cdot \cos\left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sqrt{\frac{2 \gamma M}{r_0^2 \cdot r_k + r_0 \cdot r_k^2}} \Delta t\right)\right) \quad (11)$$

1.5 Planetenbahnen

Wir betrachten jetzt eine Probemasse m die zum Zeitpunkt $t = 0$ von der Koordinate $x = x_0$, $y = 0$ und $w = 0$ mit der Anfangsgeschwindigkeit $\vec{u}_x = 0 \cdot \vec{e}_x$ und $\vec{u}_y = u_0 \cdot \vec{e}_y$ startet. Um eine Ellipsenbahn mit dem Startpunkt als Aphel zu erhalten wähle

ich $u_0 < \sqrt{\frac{2\gamma M}{r_0}} = u_K$. Dabei ist u_K die Kreisbahngeschwindigkeit.



Die zur Gleichung (4) äquivalente Gleichung lautet in diesem Fall (Herleitung im Anhang als (G611))

$$r(t) = r_0 \cdot \cos \left(\int_0^t \sqrt{\frac{2 \gamma M}{r_0^2 r(t') + r_0 r(t')^2} - \frac{u_0^2}{r(t')^2}} dt' \right) = r_0 \cdot \cos(\phi(t)) \quad (12)$$

Für das Integral habe ich dabei abkürzend geschrieben:

$$\phi(t) = \int_0^t \sqrt{\frac{2 \gamma M}{r_0^2 r(t') + r_0 r(t')^2} - \frac{u_0^2}{r(t')^2}} dt' \quad (13)$$

Zusammen mit der Ellipsen Gleichung (siehe für die Ableitung Anhang G612)

$$r(\varphi) = \frac{\frac{u_0^2}{u_K^2} \cdot r_0}{1 - \left(1 - \frac{u_0^2}{u_K^2}\right) \cdot \cos(\varphi)} \quad (14)$$

folgt daraus zunächst $\cos(\varphi(t)) = \frac{\cos(\phi(t)) - \frac{u_0^2}{u_K^2}}{\left(1 - \frac{u_0^2}{u_K^2}\right) \cdot \cos(\phi(t))}$ (15)

da zu jedem Zeitpunkt $r(t) = r(\varphi)$ gilt.

Insgesamt erhalten wir für die Bahn der Probemasse m in der Abbildung 2

$$x(t) = r_0 \cdot \cos(\phi) \cdot \cos(\varphi) = r_0 \cdot \frac{\cos(\phi(t)) - \frac{u_0^2}{u_K^2}}{1 - \frac{u_0^2}{u_K^2}} \quad (16)$$

$$y(t) = r_0 \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(\varphi) = r_0 \cdot \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{u_0^2}{u_K^2}\right)^2 \cdot \cos(\phi(t))^2 - \left(\cos(\phi(t)) - \frac{u_0^2}{u_K^2}\right)^2}}{1 - \frac{u_0^2}{u_K^2}} \quad (17)$$

$$w(t) = r_0 \cdot \sin(\phi(t)) \quad (18)$$

Es ist also nötig für ein konkreten Zeitpunkt t nur den Ausdruck $\phi(t)$ numerisch auszuwerten.

2 Anhang

Herleitung von Gleichung 12 (G611) und Gleichung 14 (G613)

$$\vec{r} = r \cdot \vec{e}_r \quad (\text{G601})$$

$$\frac{d}{dt} \vec{r} = \frac{dr}{dt} \cdot \vec{e}_r + r \cdot \frac{d}{dt} \vec{e}_r \quad \text{mit} \quad \frac{d}{dt} \vec{e}_r = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{e}_\varphi$$

$$\frac{d}{dt} \vec{r} = \frac{dr}{dt} \cdot \vec{e}_r + r \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{e}_\varphi \quad (\text{G602})$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = \frac{d^2}{dt^2} r \cdot \vec{e}_r + \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \vec{e}_r + \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{e}_\varphi + r \cdot \frac{d^2}{dt^2} \varphi \cdot \vec{e}_\varphi + r \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \vec{e}_\varphi$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = \frac{d^2}{dt^2} r \cdot \vec{e}_r + 2 \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{e}_\varphi + r \cdot \frac{d^2}{dt^2} \varphi \cdot \vec{e}_\varphi - r \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \cdot \vec{e}_r$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = \left(\frac{d^2}{dt^2} r - r \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right) \cdot \vec{e}_r + \left(2 \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + r \cdot \frac{d^2}{dt^2} \varphi \right) \cdot \vec{e}_\varphi \quad (\text{G603})$$

Setzen wir dies mit der Gravitationsbeschleunigung gleich :

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} r - r \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right) \cdot \vec{e}_r + \left(2 \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + r \cdot \frac{d^2}{dt^2} \varphi \right) \cdot \vec{e}_\varphi = -\frac{\gamma \cdot M}{r^2} \cdot \vec{e}_r \quad (\text{G604})$$

so folgen die beiden Gleichungen :

$$2 \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + r \cdot \frac{d^2}{dt^2} \varphi = 0 \quad (\text{G605})$$

$$\frac{d^2}{dt^2} r - r \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = -\frac{\gamma \cdot M}{r^2} \quad (\text{G606})$$

Sehen wir uns (G605) $2 \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + r \cdot \frac{d^2}{dt^2} \varphi = 0$ an.

Wir multiplizieren beide Seiten mit r und formen dann um .

$$2 \cdot r \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) + r^2 \cdot \frac{d^2}{dt^2} \varphi = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d}{dt} \left(r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right) = 0$$

Also gilt $r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \text{constant} = k$ (G607)

Ich möchte Ellipsenbahnen betrachten, und den Anfangspunkt der Bewegung auf den

Aphel legen. Diese Entfernung nenne ich r_0 . Dann ist $k = r_0^2 \cdot \frac{d\varphi_0}{dt} = r_0^2 \cdot \omega_0 = r_0 \cdot u_0$

u_0 soll kleiner sein als die für eine Kreisbahn notwendige Geschwindigkeit $u_K = \sqrt{\frac{\gamma \cdot M}{r_0}}$

Damit gilt: $u_0 \leq u_K = \sqrt{\frac{\gamma \cdot M}{r_0}}$ oder $k = r_0 \cdot u_0 \leq r_0 \cdot u_K = \sqrt{\frac{\gamma \cdot M}{r_0}} \cdot r_0$

setzen wir (G607) in die Gleichung (G606) $\frac{d^2}{dt^2} r - r \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = -\frac{\gamma \cdot M}{r^2}$ ein.

$$\frac{d^2}{dt^2} r - \frac{k^2}{r^3} = -\frac{\gamma \cdot M}{r^2} \quad \text{oder} \quad \frac{d^2}{dt^2} r = -\frac{\gamma \cdot M}{r^2} + \frac{k^2}{r^3} \quad (\text{G608})$$

$$\frac{d}{dt} v = \frac{dr}{dt} \cdot \frac{dv}{dr} = -\frac{\gamma \cdot M}{r^2} + \frac{k^2}{r^3}$$

$$v \cdot dv = \left(-\frac{\gamma \cdot M}{r^2} + \frac{k^2}{r^3} \right) \cdot dr \quad \text{oder} \quad \int_0^v v \, dv = \int_{r_0}^r \left(-\frac{\gamma \cdot M}{r^2} + \frac{k^2}{r^3} \right) dr$$

$$\frac{1}{2} \cdot v^2 = \left(\frac{\gamma \cdot M}{r} - \frac{\gamma \cdot M}{r_0} \right) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{k^2}{r^2} - \frac{k^2}{r_0^2} \right)$$

$$v^2 = \left(\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r} - \frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r_0} \right) - \left(\frac{k^2}{r^2} - \frac{k^2}{r_0^2} \right)$$

$$\frac{dr}{dt} = -\sqrt{\left(\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r} - \frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r_0} \right) - \left(\frac{k^2}{r^2} - \frac{k^2}{r_0^2} \right)} \quad (\text{G609})$$

$$\frac{dr}{\sqrt{\left(\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r} - \frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r_0}\right) - \left(\frac{k^2}{r^2} - \frac{k^2}{r_0^2}\right)}} = -dt$$

$$\int_{r_0}^r \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r} - \frac{k^2}{r^2}\right) - \left(\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r_0} - \frac{k^2}{r_0^2}\right)}} dr = -\int_0^t 1 dt = -t$$

$$\int_{r_0}^r \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{k^2}{2 \cdot \gamma \cdot M}\right) - \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0^2} \cdot \frac{k^2}{2 \cdot \gamma \cdot M}\right)}} dr = -\sqrt{2 \cdot \gamma \cdot M} \cdot t$$

sei $\xi^2 = \frac{\frac{k^2}{r_0^2}}{\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r_0}} = \frac{k^2}{2 \cdot \gamma \cdot M} \cdot \frac{1}{r_0}$

$$\int_{r_0}^r \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{r} - \frac{\xi^2 \cdot r_0}{r^2}\right) - \left(\frac{1}{r_0} - \frac{\xi^2 \cdot r_0}{r_0^2}\right)}} dr = -\sqrt{2 \cdot \gamma \cdot M} \cdot t$$

$$\int_{r_0}^r \frac{r}{\sqrt{\left(r - \xi^2 \cdot r_0\right) - \left(\frac{1 - \xi^2}{r_0}\right) \cdot r^2}} dr = \int_{r_0}^r \frac{r}{\sqrt{-\left(\frac{1 - \xi^2}{r_0}\right) \cdot r^2 + r - \xi^2 \cdot r_0}} dr = -\sqrt{2 \cdot \gamma \cdot M} \cdot t$$

Aus $k \leq \sqrt{\frac{\gamma \cdot M}{r_0}} \cdot r_0$ folgt $0 \leq \xi^2 = \frac{k^2}{2 \cdot \gamma \cdot M} \cdot \frac{1}{r_0} \leq \frac{\gamma \cdot M \cdot r_0}{2 \cdot \gamma \cdot M} \cdot \frac{1}{r_0} = \frac{1}{2}$

Also gilt insbesondere $-\left(\frac{1 - \xi^2}{r_0}\right) < 0$

Für das unbestimmte Integral $\int \frac{r}{\sqrt{-\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right) \cdot r^2 + r - \xi^2 \cdot r_0}} dr$ kann ich schreiben

$$\blacksquare = \frac{1}{-2 \cdot \left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)} \cdot \int \frac{-2 \cdot \left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right) \cdot r - 1 + 1}{\sqrt{-\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right) \cdot r^2 + r - \xi^2 \cdot r_0}} dr$$

$$\blacksquare = -\frac{1}{2 \cdot \left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)} \cdot \left(\int \frac{-2 \cdot \left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right) \cdot r + 1}{\sqrt{-\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right) \cdot r^2 + r - \xi^2 \cdot r_0}} dr - \int \frac{1}{\sqrt{-\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right) \cdot r^2 + r - \xi^2 \cdot r_0}} dr \right)$$

$$\blacksquare = -\frac{1}{\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)} \cdot \sqrt{-\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right) \cdot r^2 + r - \xi^2 \cdot r_0} + \int \frac{\frac{1}{2 \cdot \left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)}}{\sqrt{-\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right) \cdot r^2 + r - \xi^2 \cdot r_0}} dr$$

Für das letzte Integral gilt laut Tabelle :

$$\int \frac{\frac{1}{2 \cdot \left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)}}{\sqrt{-\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right) \cdot r^2 + r - \xi^2 \cdot r_0}} dr = \blacksquare$$

$$\blacksquare = \frac{1}{2 \cdot \left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)} \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) \cdot \arcsin \left(\frac{-2 \cdot \left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right) \cdot r + 1}{\sqrt{1-4 \cdot (1-\xi^2) \cdot \xi^2}} \right)$$

Für das bestimmte Integral folgt

$$\int_{r_0}^r \frac{r}{\sqrt{-\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right) \cdot r^2 + r - \xi^2 \cdot r_0}} dr = \blacksquare$$

$$\blacksquare = -\frac{1}{\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)} \cdot \sqrt{-\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right) \cdot r^2 + r - \xi^2 \cdot r_0} + \frac{1}{\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)} \cdot \sqrt{-\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right) \cdot r_0^2 + r_0 - \xi^2 \cdot r_0}$$

$$\blacksquare + \frac{1}{2 \cdot \left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)} \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{\frac{1-\xi^2}{r_0}}} \right) \cdot \arcsin \left(\frac{-2 \cdot \left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right) \cdot r + 1}{\sqrt{1 - 4 \cdot (1-\xi^2) \cdot \xi^2}} \right)$$

$$- \frac{1}{2 \cdot \left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)} \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{\frac{1-\xi^2}{r_0}}} \right) \cdot \arcsin \left(\frac{-2 \cdot \left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right) \cdot r_0 + 1}{\sqrt{1 - 4 \cdot (1-\xi^2) \cdot \xi^2}} \right)$$

$$\blacksquare = -\frac{1}{\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)} \cdot \sqrt{-\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right) \cdot r^2 + r - \xi^2 \cdot r_0}$$

$$\blacksquare - \frac{1}{2 \cdot \left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1-\xi^2}{r_0}}} \right) \cdot \arcsin \left(\frac{-2 \cdot \left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right) \cdot r + 1}{1 - 2 \cdot \xi^2} \right)$$

$$\blacksquare - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1-\xi^2}{r_0}}} \right) = -\sqrt{2 \cdot \gamma \cdot M} \cdot t$$

$$\frac{1 - 2 \cdot \left(\frac{1 - \xi^2}{r_0}\right) \cdot r}{1 - 2 \cdot \xi^2} = \blacksquare$$

$$\sin \left(2 \cdot \left(\frac{1 - \xi^2}{r_0}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{2 \cdot \gamma \cdot M} \cdot t - \frac{\pi}{2} - 2 \cdot \sqrt{\frac{1 - \xi^2}{r_0}} \cdot \sqrt{-\left(\frac{1 - \xi^2}{r_0}\right) \cdot r^2 + r - \xi^2 \cdot r_0} \right)$$

$$\frac{1 - 2 \cdot \left(\frac{1 - \xi^2}{r_0}\right) \cdot r}{1 - 2 \cdot \xi^2} = \blacksquare$$

$$-\cos \left(2 \cdot \left(\frac{1 - \xi^2}{r_0}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{2 \cdot \gamma \cdot M} \cdot t - 2 \cdot \sqrt{\frac{1 - \xi^2}{r_0}} \cdot \sqrt{-\left(\frac{1 - \xi^2}{r_0}\right) \cdot r^2 + r - \xi^2 \cdot r_0} \right)$$

$$\frac{1 - 2 \cdot \left(\frac{1 - \xi^2}{r_0}\right) \cdot r}{1 - 2 \cdot \xi^2} = \blacksquare$$

$$-\cos \left(2 \cdot (1 - \xi^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r_0^3}} \cdot t - 2 \cdot \sqrt{\frac{1 - \xi^2}{r_0}} \cdot \sqrt{-\left(\frac{1 - \xi^2}{r_0}\right) \cdot r^2 + r - \xi^2 \cdot r_0} \right)$$

wegen $-\cos(2 \cdot x) = -2 \cdot \cos(x)^2 + 1$

$$\frac{1 - 2 \cdot \left(\frac{1 - \xi^2}{r_0}\right) \cdot r}{1 - 2 \cdot \xi^2} = \blacksquare$$

$$-2 \cdot \cos \left((1 - \xi^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r_0^3}} \cdot t - \sqrt{\frac{1 - \xi^2}{r_0}} \cdot \sqrt{-\left(\frac{1 - \xi^2}{r_0}\right) \cdot r^2 + r - \xi^2 \cdot r_0} \right)^2 + 1$$

$$r = r_0 \cdot \frac{\xi^2}{1 - \xi^2} + \square$$

$$r_0 \cdot \frac{1 - 2 \cdot \xi^2}{1 - \xi^2} \cdot \cos \left(\left(1 - \xi^2\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r_0^3}} \cdot t - \sqrt{\left(1 - \xi^2\right) \cdot \left(1 - \frac{r}{r_0}\right)} \cdot \sqrt{\left(\left(1 - \xi^2\right) \cdot \frac{r}{r_0} - \xi^2\right)} \right)^2$$

Für den Fall $\xi = 0$, also $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ erhalten wir wieder die Gleichung nur für den

$$\text{freien Fall: } r(t) = r_0 \cdot \cos \left(\sqrt{\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r_0^3}} \cdot t - \sqrt{1 - \frac{r}{r_0}} \cdot \sqrt{\frac{r}{r_0}} \right)^2 .$$

$$\text{setzen wir nun } \alpha = \left(1 - \xi^2\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r_0^3}} \cdot t - \sqrt{\left(1 - \xi^2\right) \cdot \left(1 - \frac{r}{r_0}\right)} \cdot \sqrt{\left(\left(1 - \xi^2\right) \cdot \frac{r}{r_0} - \xi^2\right)}$$

$$\text{dann können wir vereinfacht schreiben } r = r_0 \cdot \frac{\xi^2}{1 - \xi^2} + r_0 \cdot \frac{1 - 2 \cdot \xi^2}{1 - \xi^2} \cdot \cos(\alpha)^2$$

$$\text{mit } \cos(x)^2 = \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot x) + \frac{1}{2} \quad \text{folgt}$$

$$r = r_0 \cdot \frac{\xi^2}{1 - \xi^2} + r_0 \cdot \frac{1 - 2 \cdot \xi^2}{1 - \xi^2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot \alpha) + \frac{1}{2} \right)$$

$$r = r_0 \cdot \frac{\xi^2}{1 - \xi^2} + \frac{1}{2} \cdot r_0 \cdot \frac{1 - 2 \cdot \xi^2}{1 - \xi^2} + r_0 \cdot \frac{1 - 2 \cdot \xi^2}{1 - \xi^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot \alpha)$$

$$r = \frac{1}{2} \cdot \frac{r_0}{1 - \xi^2} + r_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - 2 \cdot \xi^2}{1 - \xi^2} \cdot \cos(2 \cdot \alpha)$$

$$r = r_0 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \xi^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - 2 \cdot \xi^2}{1 - \xi^2} \cdot \cos(2 \cdot \alpha) \right)$$

$$\text{Aus } \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \xi^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - 2 \cdot \xi^2}{1 - \xi^2} = 1 \quad \text{folgt} \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \xi^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - 2 \cdot \xi^2}{1 - \xi^2} \cdot \cos(2 \cdot \alpha) \leq 1$$

Die letzte Ungleichung ist genau dann eins wenn der kosinus eins ist.
Daher mache ich den folgenden Ansatz machen :

$$r = r_0 \cdot \cos(\beta) = r_0 \cdot \frac{\xi^2}{1-\xi^2} + r_0 \cdot \frac{1-2 \cdot \xi^2}{1-\xi^2} \cdot \cos(\alpha)^2$$

$$\text{oder } \beta = \arccos\left(\frac{\xi^2}{1-\xi^2} + \frac{1-2 \cdot \xi^2}{1-\xi^2} \cdot \cos(\alpha)^2\right)$$

Den Arkuskosinus Ausdruck stelle ich jetzt als integral dar, dazu setze ich zunächst

$$y = \frac{\xi^2}{1-\xi^2} + \frac{1-2 \cdot \xi^2}{1-\xi^2} \cdot \cos(\alpha)^2 \quad \text{damit} \quad dy = -2 \cdot \frac{1-2 \cdot \xi^2}{1-\xi^2} \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) \cdot d\alpha$$

$$\beta = \arccos(y) = \int_y^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy = \int_\alpha^0 \frac{-2 \cdot \frac{1-2 \cdot \xi^2}{1-\xi^2} \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)}{\sqrt{1-\left(\frac{\xi^2}{1-\xi^2} + \frac{1-2 \cdot \xi^2}{1-\xi^2} \cdot \cos(\alpha)^2\right)^2}} d\alpha$$

$$\beta = \int_0^\alpha \frac{2 \cdot \frac{1-2 \cdot \xi^2}{1-\xi^2} \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)}{\sqrt{1-\left(\frac{\xi^2}{1-\xi^2} + \frac{1-2 \cdot \xi^2}{1-\xi^2} \cdot \cos(\alpha)^2\right)^2}} d\alpha$$

$$\text{Aus } \alpha = (1-\xi^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r_0^3}} \cdot t - \sqrt{(1-\xi^2) \cdot \left(1 - \frac{r}{r_0}\right) \cdot \left((1-\xi^2) \cdot \frac{r}{r_0} - \xi^2\right)} \quad \text{folgt}$$

$$d\alpha = (1-\xi^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r_0^3}} \cdot dt - \square$$

$$\frac{-(1-\xi^2) \cdot \frac{dr}{r_0} \cdot \left((1-\xi^2) \cdot \frac{r}{r_0} - \xi^2\right) + (1-\xi^2) \cdot \left(1 - \frac{r}{r_0}\right) \cdot (1-\xi^2) \cdot \frac{dr}{r_0}}{2 \cdot \sqrt{(1-\xi^2) \cdot \left(1 - \frac{r}{r_0}\right) \cdot \left((1-\xi^2) \cdot \frac{r}{r_0} - \xi^2\right)}}$$

$$d\alpha = (1 - \xi^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r_0^3}} \cdot dt - \blacksquare$$

$$\frac{1 - 2 \cdot (1 - \xi^2) \cdot \frac{r}{r_0}}{2 \cdot \sqrt{(1 - \xi^2) \cdot \left(1 - \frac{r}{r_0}\right) \cdot \left((1 - \xi^2) \cdot \frac{r}{r_0} - \xi^2\right)}} \cdot (1 - \xi^2) \cdot \frac{dr}{r_0}$$

$$\text{mit } dr = -\sqrt{\left(\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r} - \frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r_0}\right) - \left(\frac{k^2}{r^2} - \frac{k^2}{r_0^2}\right)} dt \quad \text{und} \quad \xi^2 = \frac{\frac{k^2}{r_0^2}}{\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r_0}} = \frac{k^2}{2 \cdot \gamma \cdot M} \cdot \frac{1}{r_0}$$

$$dr = -\sqrt{\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r_0}} \cdot \sqrt{\left(\frac{r_0}{r} - 1\right) - \xi^2 \cdot \left(\frac{r_0}{r} - 1\right) \cdot \left(\frac{r_0}{r} + 1\right)} dt$$

$$d\alpha = (1 - \xi^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r_0^3}} \cdot dt + \blacksquare$$

$$\frac{\left(1 - 2 \cdot (1 - \xi^2) \cdot \frac{r}{r_0}\right) \cdot (1 - \xi^2) \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r_0^3}} \cdot \sqrt{\left(\frac{r_0}{r} - 1\right) - \xi^2 \cdot \left(\frac{r_0}{r} - 1\right) \cdot \left(\frac{r_0}{r} + 1\right)}}{2 \cdot \sqrt{(1 - \xi^2) \cdot \left(1 - \frac{r}{r_0}\right) \cdot \left((1 - \xi^2) \cdot \frac{r}{r_0} - \xi^2\right)}} \cdot dt$$

$$d\alpha = (1 - \xi^2) \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r_0^3}} \cdot dt \cdot \left(\sqrt{1 - \xi^2} + \frac{\left(1 - 2 \cdot (1 - \xi^2) \cdot \frac{r}{r_0}\right) \cdot \frac{r_0}{r}}{2 \cdot \sqrt{1 - \xi^2}} \right)$$

$$d\alpha = (1 - \xi^2) \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r_0^3}} \cdot dt \cdot \frac{\frac{r_0}{r}}{2 \cdot \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r^2 \cdot r_0}} \cdot dt$$

$$\beta = \int_0^t \frac{2 \cdot (1 - 2 \cdot \xi^2) \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r^2 \cdot r_0}}}{\sqrt{(1 - \xi^2) - \left(\xi^2 + (1 - 2 \cdot \xi^2) \cdot \cos(\alpha)\right)^2}} dt$$

$$\beta = \int_0^t \frac{(1-2 \cdot \xi^2) \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) \cdot \sqrt{1-\xi^2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r^2 \cdot r_0}}}{\sqrt{(1-\xi^2)^2 - (\xi^2 + (1-2 \cdot \xi^2) \cdot \cos(\alpha))^2}} dt$$

mit $(1-\xi^2) \cdot \frac{r}{r_0} = \xi^2 + (1-2 \cdot \xi^2) \cdot \cos(\alpha)^2$

$$\sqrt{\left((1-\xi^2) \cdot \frac{r}{r_0} - \xi^2 \right) \cdot (1-2 \cdot \xi^2)} = (1-2 \cdot \xi^2) \cdot \cos(\alpha)$$

$$1 - \frac{(1-\xi^2) \cdot \frac{r}{r_0} - \xi^2}{(1-2 \cdot \xi^2)} = 1 - \cos(\alpha)^2 = \sin(\alpha)^2$$

$$\sqrt{(1-\xi^2)} \cdot \sqrt{\frac{1-\frac{r}{r_0}}{(1-2 \cdot \xi^2)}} = \sin(\alpha) \quad \text{und mit} \quad \xi^2 = \frac{k^2}{2 \cdot \gamma \cdot M} \cdot \frac{1}{r_0}$$

$$\beta = \int_0^t \frac{\sqrt{\left((1-\xi^2) \cdot \frac{r}{r_0} - \xi^2 \right) \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r^2 \cdot r_0}}}}{\sqrt{1 + \frac{r}{r_0}}} dt = \int_0^t \sqrt{\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r_0^2 \cdot r + r_0 \cdot r^2} - \frac{k^2}{r^2 \cdot r_0^2}} dt$$

und wieder mit $k = r_0 \cdot u_0$

$$\beta = \int_0^t \sqrt{\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r_0^2 \cdot r + r_0 \cdot r^2} - \frac{u_0^2}{r^2}} dt \quad (\text{G610})$$

ergibt insgesamt $r(t) = r_0 \cdot \cos \left(\int_0^t \sqrt{\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r_0^2 \cdot r + r_0 \cdot r^2} - \frac{u_0^2}{r^2}} dt \right)$ (G611)

wir kehren jetzt zu der Gleichung (G609) $\frac{dr}{dt} = -\sqrt{\left(\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r} - \frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r_0}\right) - \left(\frac{k^2}{r^2} - \frac{k^2}{r_0^2}\right)}$

und parametrisieren nach φ anstatt nach t .

$$\frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = -\sqrt{\left(\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r} - \frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r_0}\right) - \left(\frac{k^2}{r^2} - \frac{k^2}{r_0^2}\right)} \quad \text{mit (G607) } r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} = k$$

$$\int_{r_0}^r \frac{k}{r^2 \cdot \sqrt{\left(\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r} - \frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r_0}\right) - \left(\frac{k^2}{r^2} - \frac{k^2}{r_0^2}\right)}} dr = -\int_0^\varphi 1 d\varphi = -\varphi$$

Substitution: sei $x = \frac{1}{r}$, $dx = -\frac{1}{r^2} \cdot dr$ oder $-\frac{1}{x^2} \cdot dx = dr$

$$-\varphi = \int_{(r_0)}^{(r)} \frac{-k \cdot x^2}{x^2 \cdot \sqrt{2 \cdot \gamma \cdot M \cdot x - \frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r_0} - k^2 \cdot x^2 + \frac{k^2}{r_0^2}}} dx$$

$$\varphi = \int_{(r_0)}^{(r)} \frac{k}{\sqrt{-k^2 \cdot x^2 + 2 \cdot \gamma \cdot M \cdot x - \frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r_0} + \frac{k^2}{r_0^2}}} dx$$

$$\varphi = \int_{(r_0)}^{(r)} \frac{k}{\sqrt{-k^2 \cdot \left(\left(x - \frac{\gamma \cdot M}{k^2} \right)^2 - \left(\frac{\gamma \cdot M}{k^2} \right)^2 + 2 \cdot \frac{\gamma \cdot M}{k^2 \cdot r_0} - \frac{1}{r_0^2} \right)}} dx$$

$$\varphi = \int_{(r_0)}^{(r)} \frac{k}{\sqrt{-k^2 \cdot \left(\left(x - \frac{\gamma \cdot M}{k^2} \right)^2 - \left(\frac{\gamma \cdot M}{k^2} - \frac{1}{r_0} \right)^2 \right)}} dx = \int_{(r_0)}^{(r)} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\gamma \cdot M}{k^2} - \frac{1}{r_0} \right)^2 - \left(x - \frac{\gamma \cdot M}{k^2} \right)^2}} dx$$

$$\varphi = \int_{(r_0)}^{(r)} \frac{1}{\left(\frac{\gamma \cdot M}{k^2} - \frac{1}{r_0}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x - \frac{\gamma \cdot M}{k^2}}{\frac{\gamma \cdot M}{k^2} - \frac{1}{r_0}}\right)^2}} dx$$

Substitution: sei $u = \frac{x - \frac{\gamma \cdot M}{k^2}}{\frac{\gamma \cdot M}{k^2} - \frac{1}{r_0}}$, $du = \frac{dx}{\frac{\gamma \cdot M}{k^2} - \frac{1}{r_0}}$

$$\varphi = \frac{\frac{\gamma \cdot M}{k^2} - \frac{1}{r_0}}{\left(\frac{\gamma \cdot M}{k^2} - \frac{1}{r_0}\right)} \cdot \int_{(r_0)}^{(r)} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \int_{(r_0)}^{(r)} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$$

$\varphi = \arcsin(u)$ (von r_0 bis r)

oder wieder mit x $\varphi = \arcsin\left(\frac{x - \frac{\gamma \cdot M}{k^2}}{\frac{\gamma \cdot M}{k^2} - \frac{1}{r_0}}\right)$ (von r_0 bis r)

oder wieder mit r $\varphi = \arcsin\left(\frac{\frac{1}{r} - \frac{\gamma \cdot M}{k^2}}{\frac{\gamma \cdot M}{k^2} - \frac{1}{r_0}}\right)$ (von r_0 bis r)

damit $\varphi = \arcsin\left(\frac{\frac{1}{r} - \frac{\gamma \cdot M}{k^2}}{\frac{\gamma \cdot M}{k^2} - \frac{1}{r_0}}\right) - \arcsin\left(\frac{\frac{1}{r_0} - \frac{\gamma \cdot M}{k^2}}{\frac{\gamma \cdot M}{k^2} - \frac{1}{r_0}}\right) = \arcsin\left(\frac{\frac{1}{r} - \frac{\gamma \cdot M}{k^2}}{\frac{\gamma \cdot M}{k^2} - \frac{1}{r_0}}\right) + \frac{\pi}{2}$

$$\frac{\frac{1}{r} - \frac{\gamma \cdot M}{k^2}}{\frac{\gamma \cdot M}{k^2} - \frac{1}{r_0}} = \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\varphi)$$

$$r = \frac{1}{\frac{\gamma \cdot M}{k^2} - \left(\frac{\gamma \cdot M}{k^2} - \frac{1}{r_0} \right) \cdot \cos(\varphi)} = \frac{\frac{1}{\frac{\gamma \cdot M}{k^2}}}{1 - \left(1 - \frac{k^2}{\gamma \cdot M \cdot r_0} \right) \cdot \cos(\varphi)} \quad \text{mit } k = u_0 \cdot r_0$$

$$r = \frac{\frac{1}{\frac{\gamma \cdot M}{u_0^2 \cdot r_0^2}}}{1 - \left(1 - \frac{u_0^2 \cdot r_0^2}{\gamma \cdot M \cdot r_0} \right) \cdot \cos(\varphi)} = \frac{\frac{u_0^2}{\gamma \cdot M} \cdot r_0}{r_0 \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{u_0^2}{\frac{\gamma \cdot M}{r_0}} \right) \cdot \cos(\varphi) \right)} \quad (\text{G612})$$

Ich setze $u_k = \sqrt{\frac{\gamma \cdot M}{r_0}}$ als diejenige Geschwindigkeit die zu einer Kreisbewegung führen würde. Anscheinend sind die Eigenschaften der Ellipsenbahn von dem Verhältnis $\left(\frac{u_0}{u_k} \right)^2$ abhängig.

$$\text{Wir können dann schreiben : } r(\varphi) = \frac{\frac{u_0^2}{u_k^2} \cdot r_0}{1 - \left(1 - \frac{u_0^2}{u_k^2} \right) \cdot \cos(\varphi)} \quad (\text{G613})$$

Ein Vergleich mit der Ellipsen Gleichung $r(\varphi) = \frac{p}{1 - \varepsilon \cdot \cos(\varphi)}$ ergibt

$$p = \frac{u_0^2}{u_k^2} \cdot r_0 = \frac{u_0^2}{\frac{\gamma \cdot M}{r_0}} \cdot r_0 \quad \text{und} \quad \varepsilon = 1 - \frac{u_0^2}{u_k^2} = 1 - \frac{u_0^2}{\frac{\gamma \cdot M}{r_0}}$$