Expansion des Raumes mit Raumenergie

Zafer Sah

25 April 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Homogene Expansion

Wir betrachten einen Raumbereich V_0, der mit der Stärke ε_0 expandiert. Die Gesamtenergie zum Zeitpunkt $t = 0$ schreibe ich in der Form

$$E_g = \rho_0 \cdot V_0 + k \cdot V_0 \tag{1}$$

Dabei ist $\rho_0 \cdot V_0$ jene Energieform, die den Raum zur Expansion bringt, während $k \cdot V_0$ die Energie des Raumes selbst ist. Bei der Expansion verwandelt sich also die Energie $\rho_0 \cdot V_0$ in die Raumenergie. Setzen wir die Energieerhaltung voraus so können wir nach der Zeit Δt schreiben,

$$E_g = \rho \cdot V + k \cdot V \tag{2}$$

siehe Abbildung 1

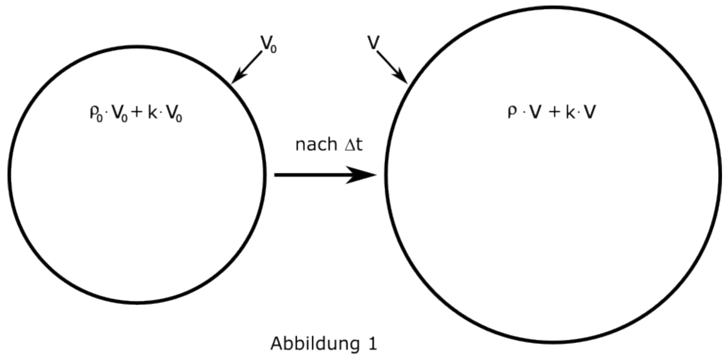

Abbildung 1

Durch die Gleichsetzung von Gleichung (1) und Gleichung (2) erhalten wir

$$E_g = \rho_0 \cdot V_0 + k \cdot V_0 = \rho \cdot V + k \cdot V \tag{3}$$

nach V aufgelöst ergibt

$$V = V_0 \cdot \frac{\rho_0 + k}{\rho + k} \tag{4}$$

Für den Fall, dass $\rho = 0$ wird, wenn sich also die ganze, die Expansion antreibende Energie aufbraucht, wird der Raum die maximale Ausdehnung V_{max} erreichen. Wir erhalten aus der Gleichung (4)

$$V = V_0 \cdot \frac{\rho_0 + k}{0 + k} = V_0 \cdot \left(1 + \frac{\rho_0}{k}\right) = V_{max} \tag{5}$$

Damit können wir Gleichung 4 auch anders schreiben.

$$V = V_{max} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\rho}{k}} \tag{6}$$

Für homogen kollabierende Räume hatte ich die Beziehung

$$\kappa^2 = 12 \cdot \pi \cdot \gamma \cdot \rho \tag{7}$$

Mit κ als ein Maß für die Stärke des Kollabierens , γ als Gravitationskonstante und ρ als Massendichte.
Symmetrisch setze ich für die Expandierenden Räume an.

$$\varepsilon^2 = \xi \cdot \rho \tag{8}$$

mit der Definition

$$\varepsilon = \frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt} \tag{9}$$

erhalten wir

$$\frac{\rho}{k} = \frac{\varepsilon^2}{k \cdot \xi} = \frac{1}{k \cdot \xi} \cdot \left(\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt} \right)^2 \tag{10}$$

setzen wir dies in die Gleichung 6 ein so folgt

$$V = V_{max} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{k \cdot \xi} \cdot \left(\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt} \right)^2} \tag{11}$$

oder nach einigen Umformungen

$$\frac{dV}{dt} = \sqrt{k \cdot \xi} \cdot \sqrt{-V^2 + V_{max} \cdot V} \tag{12}$$

und nach der Trennung der Variablen

$$\frac{dV}{\sqrt{-V^2 + V_{max} \cdot V}} = \sqrt{k \cdot \xi} \cdot dt \tag{13}$$

$$\int_{V_0}^{V} \frac{dV}{\sqrt{-V^2 + V_{max} \cdot V}} = \int_0^t \sqrt{k \cdot \xi} \cdot dt \tag{14}$$

Die Integration ergibt (siehe Anhang)

$$-\arcsin \left(1 - \frac{2 \cdot V}{V_{max}} \right) + \arcsin \left(1 - \frac{2 \cdot V_0}{V_{max}} \right) = \sqrt{k \cdot \xi} \cdot t \tag{15}$$

nach V aufgelöst erhalten wir

$$V(t) = \frac{1}{2} \cdot V_{max} \cdot \left[1 - \sin \left(\arcsin \left(1 - \frac{2 \cdot V_0}{V_{max}} \right) - \sqrt{k \cdot \xi} \cdot t \right) \right] \tag{16}$$

mit $V = \frac{4}{3} \cdot \pi R^3$ erhalten wir

$$R(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot R_{max} \cdot \left[1 - \sin\left(\arcsin\left(1 - \frac{2 \cdot V_0}{V_{max}}\right) - \sqrt{k \cdot \xi} \cdot t\right)\right]^{\frac{1}{3}} \tag{17}$$

einmal nach der Zeit differenziert

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\frac{1}{6} \cdot R_{max}^3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{k \cdot \xi} \cdot \cos\left(\arcsin\left(1 - \frac{2 \cdot V_0}{V_{max}}\right) - \sqrt{k \cdot \xi} \cdot t\right)}{R^2} \tag{18}$$

nach einigen Umformungen mit Gleichung 16 und $\varepsilon = \sqrt{k \cdot \xi}$ bekommen wir

$$\frac{dR}{dt} = \frac{1}{3} \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{\frac{R_{max}^3}{R^3}} \cdot \sqrt{1 - \frac{R^3}{R_{max}^3}} \cdot R \tag{19}$$

Diese Gleichung ähnelt sehr der Hubble-Beziehung

$$\frac{dR}{dt} = H \cdot R \tag{20}$$

Wenden wir diese Gleichung auf das Universum an, so können wir zu einem bestimmten Zeitpunkt annehmen das der Ausdruck annähernd konstant ist.

$$\frac{1}{3} \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{\frac{R_{max}^3}{R^3}} \cdot \sqrt{1 - \frac{R^3}{R_{max}^3}} = konstant = H \tag{21}$$

Die Hubble-Konstante H gibt also nicht ohne weiteres die Expansion des Universums wieder. Um an die wahre Expansionsrate ε zu kommen müssen wir Annahmen über die jetzige Ausdehnung R sowie über die maximale Ausdehnung R_{max} des Universums machen.
Annahme: $R_{max} = 2 \cdot R$
Wir nehmen also an, dass sich die Größe das Universums in der Zukunft höchstens noch verdoppeln wird. Damit wird Gleichung 21 zu

$$\frac{1}{3} \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{8}} = \varepsilon \cdot \sqrt{\frac{7}{9}} = 0,88 \cdot \varepsilon = H \tag{22}$$

Man erhält also unter der obigen Annahme :

$$\varepsilon \approx H \approx 2 \cdot 10^{-18} \cdot s^{-1} = 2 \cdot 10^{-18} \cdot \frac{m^3}{m^3 \cdot s} = 2 \cdot \left(10^{-6} \cdot m\right)^3 \cdot \frac{1}{m^3 \cdot s} = \frac{2 \cdot \mu m^3}{m^3 \cdot s} \tag{23}$$

$$\text{oder} \quad \varepsilon \approx \frac{(1,3\ \mu m)^3}{m^3 \cdot s} \qquad \text{mit} \qquad \Delta V_{exp} = (1,3 \mu m)^3 = 2,2 \cdot 10^{-18}\, m^3 \tag{24}$$

Das Universum wächst also derart, dass das Einheitsvolumen $1m^3$ pro Sekunde um ein Würfelchen mit der Kantenlänge von $1,3\,\mu m$ wächst.

Durch dieses Wachstum wird die Wellenlänge eines Photons vergrößert. Um den Energieverlust eines einzelnen Photons zu berechnen benutze ich den Dopplereffekt.

Sei $\quad H = 70 \cdot \dfrac{km}{s \cdot Mpc}$

Ein Photon das aus 1Mpc Entfernung aus der Ruhelage zum Empfänger in einem homogen expandierenden Universum ausgesandt wird, verhält sich wie ein Photon welches aus 1Mpc Entfernung ausgesandt wird und der Sender

eine Fluchtgeschwindigkeit von $\quad v_F = 70 \cdot \dfrac{km}{s} = 7 \cdot 10^4 \cdot \dfrac{m}{s} \quad$ hat.

Aus der Dopplergleichung für einen sich Entfernenden Sender bei ruhendem Beobachter

$$\nu_B = \nu_S \cdot \left(1 - \frac{v_F}{c}\right) \qquad \text{wobei B für den Beobachter und S für den Sender steht} \tag{25}$$

Erhalten wir für die Energie

$$E_B = h \cdot \nu_B = h \cdot \nu_S \cdot \left(1 - \frac{v_F}{c}\right) = E_S \cdot \left(1 - \frac{v_F}{c}\right)$$

$$E_B = E_S - E_S \cdot \frac{v_F}{c} = E_S - E_S \cdot \frac{7 \cdot 10^4 \cdot \frac{m}{s}}{3 \cdot 10^8 \cdot \frac{m}{s}}$$

folgt für den Energieverlust

$$\Delta E = E_B - E_S = -E_S \cdot 2.3 \cdot 10^{-4}$$

Das Photon verliert also auf der Strecke von 1Mpc in etwa $3 \cdot 10^6$ Jahren , $\frac{23}{1000}$ stel seiner Energie. Der Energieverlust pro Sekunde beträgt dann mit $3 \cdot 10^6$ Jahre $= 9,5 \cdot 10^{13}\ s$

$$\Delta E\,(pro Sekunde) = -E_S \cdot \frac{2.3 \cdot 10^{-4}}{9,5 \cdot 10^{13}} = -E_S \cdot 2,4 \cdot 10^{-18}$$

in $1m^3$ befinden sich $4 \cdot 10^8$ Photonen. Damit beträgt der Energieverlust der Photonen in $1m^3$ Volumen

$$\Delta E\,(pro\ Sekunde, pro\ Einheitsvolumen) = -E_S \cdot 2,4 \cdot 10^{-18} \cdot 4 \cdot 10^8 = -E_S \cdot 10^{-9}$$

Diesen Energieverlust möchte ich zu dem Wachstum des Raumes gegenüberstellen.

$$\Delta E = k \cdot \Delta V_{exp} \tag{26}$$

Da ΔE und ΔV_{exp} bekannt sind können wir hier raus die Proportionalitätskonstante des Raumes berechnen.

$$k = \frac{\Delta E}{\Delta V_{exp}} = \frac{E_S \cdot 10^{-9}}{2,2 \cdot 10^{-18}} \cdot \frac{1}{m^3} \approx E_S \cdot 5 \cdot 10^8 \ \frac{1}{m^3}$$

als Sender nehmen wir die kosmische Hintergrundstrahlung mit einer Wellenlänge von $\lambda = 1mm = 10^{-3}\ m$

$$\text{mit} \qquad E_S = \frac{h \cdot c}{\lambda} = \frac{6.62 \cdot 10^{-34} \cdot Js \cdot 3 \cdot 10^8 \ \frac{m}{s}}{10^{-3}\ m} \approx 2 \cdot 10^{-22}\ J$$

$$\text{erhalten wir} \qquad k = 2 \cdot 10^{-22}\ J \cdot 5 \cdot 10^8 \ \frac{1}{m^3} = 10^{-13} \ \frac{J}{m^3} \tag{27}$$

$1\ m^3$ Raum entspricht einem Energiebetrag von $10^{-13}\ J$.