Expandierende und Kollabierende Räume

Zafer Sah

22 Juni 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Geradlinig Gleichmäßig Beschleunigte Bezugssysteme **4**
1.1 Einleitung 4
1.2 Raketenflug 6
1.3 Geradlinig Gleichmäßig Beschleunigte Bezugssysteme 12
1.3.1 Längenmessung 13
1.3.2 Zeitmessung 14
1.3.3 Uhrensynchronisation auf der X''-Achse 19
1.3.4 Uhrensynchronisation auf der Y'' und Z''-Achse 21
1.3.5 Geschwindigkeitsmessung auf der $X'' - Achse$ 23
1.3.6 Beschleunigungsmessung auf der $X'' - Achse$ 24
1.3.7 Transformationsgleichungen 26
1.3.8 Umkehr-Transformationsgleichungen 31
1.3.9 Anwendung der Transformationsgleichungen 35
1.3.10 Lichtablenkung 42
1.3.11 Das Translationsfeld 43
1.3.12 Zeitmessung Allgemein 45
1.4 Der Zeitantrieb 49

2 Expandierende und Kollabierende Räume **51**
2.1 Einleitung 51
2.2 Die Entdeckung 53
2.3 Erste Betrachtungen 54
2.4 Einführung in die expandierende und kollabierende Räume 59
2.5 Homogen und mit konstanter Stärke expandierende Räume 63
2.6 Homogen und mit konstanter Stärke kollabierende Räume 66
2.7 Begrenzt expandierende und kollabierende Räume 72
2.8 Begrenzt kollabierende und homogen expandierende Räume 77

3 Expandierende und Kollabierende Räume Relativistisch **81**
3.1 Überführung des Translationsfeldes 81

4 Das äußere Gravitationsfeld **86**
4.1 Die neue Sicht auf die Gravitation 86

5 Die 5. Wechselwirkung **89**
5.1 Das Experiment zur 5. Wechselwirkung 89
5.2 Abschätzung über die Expansion des Universums 91

6 Interstellare Reisen **93**

7 Anhang **94**
7.1 Anhang 1 95
7.2 Anhang 2 98

7.3 Anhang 3 102
7.4 Anhang 4 104
7.5 Anhang 5 110

Anhang 1 **117**
7.6 Anhang 6 119
7.7 Anhang 7 122

1 Geradlinig Gleichmäßig Beschleunigte Bezugssysteme

1.1 Einleitung

Der Inhalt dieser Arbeit kann aus der Überschrift erahnt werden, wohl kaum aber ihre Zielsetzung, eine neue Gravitationstheorie zu entwickeln mit der Tendenz zur Quantengravitation. Niemand wird wohl bei der Überschrift „Geradlinig Gleichmäßig Beschleunigte Bezugssysteme“ an die nächste Revolution in der theoretischen Physik denken. Aber wenn das wahr sein sollte, Wie kann das sein? Die alte Weisheit „ Manchmal muss man einen Schritt zurückgehen um langfristig vorwärts zukommen“ scheint sich hier zu bewahrheiten. Die Abschnitte „Translationsfeld“ und „Zeitantrieb“ habe ich separat formuliert um die Zielsetzung bisschen in den Fokus zu rücken. Natürlich kann allein aus der Betrachtung der geradlinig gleichförmig beschleunigten Bezugssysteme keine Gravitationstheorie konstruiert werden. Eine zweite Arbeit mit der Überschrift „Expandierende und Kollabierende Räume“ welche sich als Fortsetzung der Vorliegenden Arbeit versteht ist dazu erforderlich. Dennoch wird schon im Rahmen dieser Arbeit zur Tage treten dass, Albert Einstein bei der Entwicklung der Allgemeinen Relativitätstheorie einiges versäumt hat. Auch Einstein betrachtete zu Beginn seiner Bemühungen eine neue Theorie der Gravitation aufzustellen beschleunigte Bewegungen, die nach der Entwicklung der Speziellen Relativitätstheorie relativistisch berechenbar wurden. Hier steckt wohl sein erstes Versäumnis. Zu sehr fixiert auf das Allgemeine Relativitätsprinzip und auf die Gravitation holte er aus der Betrachtung beschleunigte Bewegungen nur dass heraus was er unmittelbar brauchte, das Äquivalenzprinzip. Grundsätzlich nicht falsch. Aber dadurch entging seiner Aufmerksamkeit das relativistische Feld der Geradlinig Gleichmäßig Beschleunigten Bezugssysteme von mir fortan als Translationsfeld bezeichnet. Bis heute ist der Physik die Grundgleichung dieser Beschleunigten Bezugssysteme $a\left(x\right)=\dfrac{c^2}{x}$ nicht bekannt. Ein Umstand der kaum zu begründen sein dürfte. Man versuche sich vorzustellen uns wäre die entsprechende Gleichung für Rotierende Bezugssysteme $a\left(r\right)=\dfrac{v^2}{r}$ noch immer nicht bekannt. Einfach undenkbar würde man meinen aber weit gefehlt. Das ist unser Stand in Bezug auf Geradlinig Gleichmäßig Beschleunigte Bezugssysteme heute. Dabei lassen sich diese Bezugssysteme exakt berechnen. Besonders das Translationsfeld hat alle relevanten Eigenschaften des **„späteren“** Gravitationsfeldes. Das löst nicht nur das Einstein‘sche Äquivalenzprinzip auf , welches sich fortan als Vererbung versteht, sondern ermöglicht einen neuen, fast bin ich geneigt zu sagen Königsweg zur Gravitation.

Das Konzept der expandierenden und kollabierenden Räume ist in dieser Hinsicht wesentlich leistungsfähiger. Hat sie doch von Anfang an eine fünfte Wechselwirkung, die zu recht als Partner der Gravitation angesehen werden kann in sich enthalten. Einstein sagte gegen Ende seines Lebens „50 Jahre intensiven Nachdenkens haben mich der Antwort auf die Frage ’Was sind Lichtquanten?’ nicht näher gebracht. Natürlich bildet sich heute jeder Wicht ein, er wisse die Antwort. Doch da täuscht er sich. “ Die Ironie bei der ganzen Sache ist die, dass die fünfte Wechselwirkung möglicherweise eine Wechselwirkung des Lichtes ist.

1.2 Raketenflug

Am Anfang steht ein einfaches Problem. Nehmen wir an wir hätten vor zum nächsten Sternensystem zu fliegen und würden dafür zwei Raketen einsetzen. Für die beiden Raketen mögen die folgenden Bedingungen gelten:

1. Die Raketen 1 und 2 sollen hintereinander fliegen und von einem Inertialsystem S aus gleichzeitig von den Koordinaten x_{10} und x_{20} starten.
2. Rakete 1 möge stets mit der in ihrem momentanem Ruhesystem konstanten Beschleunigung a_1 fliegen.
3. Rakete 2 möge stets mit der in ihrem momentanem Ruhesystem konstanten Beschleunigung a_2 fliegen.
4. Zwischen a_1 und a_2 möge zum Zeitpunkt des Starts im Inertialsystem S die folgende Beziehung gelten:

$$a_2 = \frac{a_1}{1 + \frac{a_1 \cdot (x_{20} - x_{10})}{c^2}} \qquad \text{oder} \qquad \frac{c^2}{a_2} - \frac{c^2}{a_1} = x_{20} - x_{10} \tag{1}$$

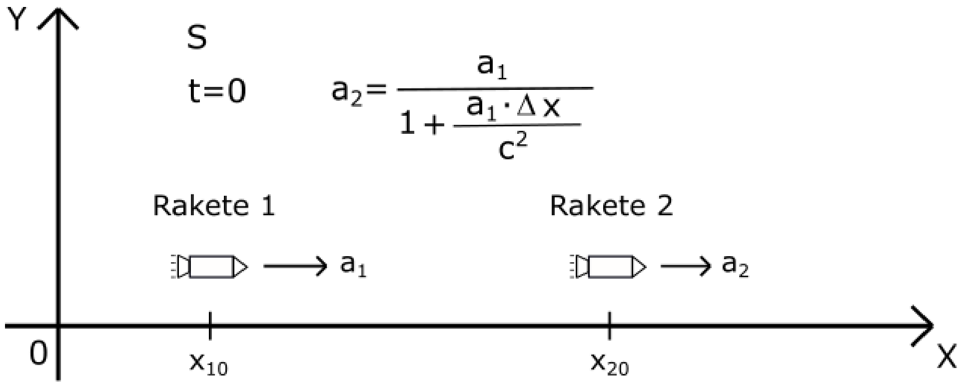


Abbildung 1

Zuerst beweise ich einige Sätze.

Satz 1 *Die Beziehung* $a_2 = \frac{a_1}{1 + \frac{a_1 \cdot (x_{20} - x_{10})}{c^2}}$ *folgt aus der Lorentzkontraktion in S.*

Beweis 1 *Für die Ortskoordinaten der Raketen 1 und 2 gilt in S zum Zeitpunkt t*

Rakete 1: $x_1(t) = \frac{c^2}{a_1} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{a_1^2 \cdot t^2}{c^2}} - 1 \right) + x_{10}$ *siehe Anhang 1 (G10)*

Rakete 2: $x_2(t) = \frac{c^2}{a_2} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{a_2^2 \cdot t^2}{c^2}} - 1 \right) + x_{20}$

Für die Differenz folgt wieder

$$x_2(t) - x_1(t) = \frac{c^2}{a_2} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{a_2^2 \cdot t^2}{c^2}} - 1 \right) + x_{20} - \frac{c^2}{a_1} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{a_1^2 \cdot t^2}{c^2}} - 1 \right) - x_{10}$$

Nun muss $\lim_{t \to \infty} (x_2(t) - x_1(t)) = 0$ (2)

sein, da der Abstand der Raketen von S ausgesehen eine Lorentzkontraktion erfährt.

$$0 = \lim_{t \to \infty} \left(\frac{c^2}{a_2} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{a_2^2 \cdot t^2}{c^2}} - 1 \right) + x_{20} - \frac{c^2}{a_1} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{a_1^2 \cdot t^2}{c^2}} - 1 \right) - x_{10} \right)$$

$$0 = \left(\frac{c^2}{a_2} \cdot \left(\frac{a_2 \cdot t}{c} - 1 \right) + x_{20} - \frac{c^2}{a_1} \cdot \left(\frac{a_1 \cdot t}{c} - 1 \right) - x_{10} \right)$$

$$0 = c \cdot t - \frac{c^2}{a_2} + x_{20} - c \cdot t + \frac{c^2}{a_1} - x_{10} = \frac{c^2}{a_1} - \frac{c^2}{a_2} + x_{20} - x_{10}$$

Woraus dann die Behauptung folgt.

Satz 2 *Sei S das momentane Ruhesystem der Raketen zum Zeitpunkt $t = 0$.*
Sei S' ein Inertialsystem welches sich relativ zu S mit der Geschwindigkeit v, in Richtung der positiven X-Achse bewegt.Ferner sollen die Ursprünge 0 und $0'$ zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ zusammenfallen.
Ist S' zu einem Zeitpunkt t_1' das momentane Ruhesystem der Rakete 1 dann ist S' zu diesem Zeitpunkt auch das momentane Ruhesystem der Rakete 2.

Beweis 2 *S' ist genau dann das momentane Ruhesystem von Rakete 1, wenn Rakete 1 die Geschwindigkeit v erreicht. Zum Zeitpunkt $t = t_1$ möge also in S die Rakete 1 die Geschwindigkeit* $v = \frac{a_1 \cdot t_1}{\sqrt{1 + \frac{a_1^2 \cdot t_1^2}{c^2}}}$ *(siehe Anhang 1 (G9)) erreichen. Zum Zeitpunkt* $t = t_2$ *möge dann in S die Rakete 2 die Geschwindigkeit* $v = \frac{a_2 \cdot t_2}{\sqrt{1 + \frac{a_2^2 \cdot t_2^2}{c^2}}}$ *erreichen.*

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt sofort : $a_1 \cdot t_1 = a_2 \cdot t_2$ (3)

Dann gilt nach den speziellen Lorentz-Transformationsgleichungen in S'

$$t_1' = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2} \cdot x_1(t_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad \textit{und} \qquad t_2' = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2} \cdot x_2(t_2)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad \textit{(siehe Anhang 1 (G1))}$$

oder für die Differenz $$t_2' - t_1' = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2} \cdot (x_2(t_2) - x_1(t_1))}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ferner folgt aus $$v = \frac{a_1 \cdot t_1}{\sqrt{1 + \frac{a_1^2 \cdot t_1^2}{c^2}}} \quad , \quad t_1 = \frac{\frac{v}{a_1}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad \textit{und} \qquad t_2 = \frac{\frac{v}{a_2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

wodurch wir die folgende Differenz bekommen.

$$t_2 - t_1 = \frac{\frac{v}{a_2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{\frac{v}{a_1}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\frac{v}{c^2} \cdot \left(\frac{c^2}{a_1} - \frac{c^2}{a_2} \right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \overset{(1)}{=} \frac{\frac{v}{c^2} \cdot (x_{20} - x_{10})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

(1) *wurde bei der letzten Gleichsetzung benutzt. Für die Ortskoordinaten der Raketen gilt zu den Zeitpunkten* t_1 *und* t_2

Rakete 1: $$x_1(t_1) = \frac{c^2}{a_1} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{a_1^2 \cdot t_1^2}{c^2}} - 1 \right) + x_{10} \qquad \textit{(siehe Anhang 1 (G10))}$$

Rakete 2: $$x_2(t_2) = \frac{c^2}{a_2} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{a_2^2 \cdot t_2^2}{c^2}} - 1 \right) + x_{20}$$

Oder für die Differenz folgt mit $$\sqrt{1 + \frac{a_1^2 \cdot t_1^2}{c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \sqrt{1 + \frac{a_2^2 \cdot t_2^2}{c^2}} \tag{4}$$

$$x_2(t_2) - x_1(t_1) = \frac{c^2}{a_2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) + x_{20} - \frac{c^2}{a_1} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) - x_{10}$$

$$x_2(t_2) - x_1(t_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \cdot \left(\frac{c^2}{a_2} - \frac{c^2}{a_1} \right) + (x_{20} - x_{10}) \quad \textit{und wieder mit} \quad (1)$$

$$x_2(t_2) - x_1(t_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \cdot (x_{20} - x_{10}) + (x_{20} - x_{10}) = \frac{x_{20} - x_{10}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{5}$$

Setzen wir die Terme $x_2(t_2) - x_1(t_1)$ *und* $t_2 - t_1$ *in die Gleichung*
$t'_2 - t'_1 = \dfrac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2} \cdot (x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ *ein so folgt:* $t'_2 - t'_1 = 0$ *oder* $t'_2 = t'_1$ *Also sind die beiden Ereignisse Rakete 1 erreicht die Geschwindigkeit* v *und Rakete 2 erreicht die Geschwindigkeit* v *in S' gleichzeitig. S' ist also gleichzeitig das momentane Ruhesystem von Rakete 1 und Rakete 2.*

Satz 3 *Die Entfernung von Rakete 1 zu Rakete 2 ist im jeweiligen Ruhesystem stets konstant und beträgt* $x_{20} - x_{10}$*.*

Beweis 3 *Zum Zeitpunkt* $t = t_1$ *möge in S die Rakete 1 die Geschwindigkeit*
$v = \dfrac{a_1 \cdot t_1}{\sqrt{1+\frac{a_1^2 \cdot t_1^2}{c^2}}}$ *erreichen.*
Zum Zeitpunkt $t = t_2$ *möge in S die Rakete 2 ebenfalls die Geschwindigkeit*
$v = \dfrac{a_2 \cdot t_2}{\sqrt{1+\frac{a_2^2 \cdot t_2^2}{c^2}}}$ *erreichen.*
Dann gibt es nach Satz 1 ein Inertialsystem S', so das beide Ereignisse in S' gleichzeitig sind.Damit folgt aus den speziellen Lorentz-Transformationen :

$$x_1(t_1) = \frac{x'_1(t'_1) + v \cdot t'_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \textit{sowie} \quad x_2(t_2) = \frac{x'_2(t'_2) + v \cdot t'_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

bilden wir die Differenz und nutzen die Tatsache aus, dass $t'_2 - t'_1 = 0$ *gilt , so folgt:*

$$x_2(t_2) - x_1(t_1) = \frac{x'_2(t'_2) - x'_1(t'_1)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

mit der Gleichung (5) *folgt dann:* $x'_2(t'_2) - x'_1(t'_1) = x_{20} - x_{10}$

Satz 4 *Sei S ein Inertialsystem von dem aus die Raketen 1 und 2 von den Koordinaten* x_{10} *und* x_{20} *gleichzeitig mit den Beschleunigungen* a_1 *und* a_2 *starten und zueinander den Abstand* $\Delta x = x_{20} - x_{10}$ *haben.*
Es gelte wieder die Bedingung 4 also $a_2 = \dfrac{a_1}{1 + \dfrac{a_1 \cdot \Delta x}{c^2}}$ *. Dann genügt der folgender Ansatz mit x als Startkoordinate für eine Rakete der Bedingung 4.*

$$a(x) = \frac{c^2}{x + \Delta\xi} \qquad \text{wobei } \Delta\xi \text{ eine konstante ist} \tag{6}$$

Beweis 4 *Nach* (6) *gilt dann :* $a_1 = a(x_{10}) = \dfrac{c^2}{x_{10} + \Delta\xi}$ *und* $a_2 = a(x_{20}) = \dfrac{c^2}{x_{20} + \Delta\xi}$

und damit $a_2 = \dfrac{c^2}{x_{20} + \Delta\xi} = \dfrac{c^2}{x_{10} + \Delta x + \Delta\xi} = \dfrac{\dfrac{c^2}{x_{10} + \Delta\xi}}{1 + \dfrac{\Delta x}{x_{10} + \Delta\xi}} = \dfrac{a_1}{1 + \dfrac{a_1 \cdot \Delta x}{c^2}}$

Satz 5 *Es gibt ein Inertialsystem S wie in Satz* 4 *,aber mit der zusätzlichen Eigenschaft dass* $\Delta\xi = 0$ *ist, so dass der Ansatz* (6) *die folgende Form bekommt.*

$$a(x) = \frac{c^2}{x} \tag{7}$$

Beweis 5 *In* (6) *brauchen wir dafür nur den Koordinatentransformation* $x^* = x + \Delta\xi$ *durchzuführen. Damit wird lediglich der Ursprung des Koordinatensystems von S, den Beschleunigungen der Raketen angepasst.*

Definition 1 (Das natürliche Ruhesystem) *Ein Inertialsystem S nach Satz* 5 *bezeiche ich als das natürliche Ruhesystem der beschleunigten Raketen.*

Jetzt kommt ein wichtiger Satz der als Verstärkung von Satz 2 zu verstehen ist.

Satz 6 *Sei S das natürliche Ruhesystem der Raketen 1 und 2 zum Zeitpunkt* $t = 0$*. Sei S' ein Inertialsystem welches sich relativ zu S mit der Geschwindigkeit v in die Richtung der positiven X-Achse bewegt. Zum Zeitpunkt* $t = t' = 0$ *mögen die Ursprünge* 0 *und* $0'$ *von S und S' zusammenfallen. Auch S' ist dann zu einem späteren Zeitpunkt* $t' > 0$ *das natürliche momentane Ruhesystem der Raketen 1 und 2 .*

Beweis 6 *In Satz* 2 *hatten wir bewiesen, das ein S' mit diesen Eigenschaften das momentane Ruhesystem der beiden Raketen 1 und 2 ist. In Satz* 3 *haben wir bewiesen das die Entfernung von Rakete 1 und 2 in allen Ruhesystemen konstant ist und* $x_{20} - x_{10}$ *beträgt.*

Jetzt möchte ich die Ortskoordinate $x'_1(t'_1)$ von der Rakete 1 in S' berechnen, wenn Rakete 1 die Geschwindigkeit v erreicht hat. Aus den speziellen Lorentz-Transformationen folgt

$$x'_1(t'_1) = \frac{x_1(t_1) - v \cdot t_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \textit{mit}\ (G10) \quad \textit{und} \quad (4)$$

$$x'_1(t'_1) = \frac{\frac{c^2}{a_1} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{a_1^2 \cdot t_1^2}{c^2}} - 1\right) + x_{10} - v \cdot t_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\frac{c^2}{a_1} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) + x_{10} - v \cdot t_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\textit{und mit} \quad t_1 = \frac{\frac{v}{a_1}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \textit{erhalten wir} \quad x'_1(t'_1) = \frac{\frac{c^2}{a_1} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) + x_{10} - \frac{\frac{v^2}{a_1}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x'_1(t'_1) = \frac{c^2}{a_1} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 + \frac{a_1 \cdot x_{10}}{c^2} - \frac{\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \textit{mit} \quad a_1 = \frac{c^2}{x_{10}} \quad \textit{oder} \quad \frac{a_1 \cdot x_{10}}{c^2} = 1$$

$$\textit{ergibt} \qquad x'_1(t'_1) = \frac{c^2}{a_1} \tag{8}$$

Also ist auch S' auch ein natürliches (oder Koordinatensystem bedingt angepasstes) Ruhsystem für die beschleunigten Raketen.

1.3 Geradlinig Gleichmäßig Beschleunigte Bezugssysteme

Ich möchte nach diesen Vorbereitungen das Geradlinig Gleichmäßig Beschleunigte Bezugssystem einführen. Wir betrachten ein Inertialsystem S, von dem aus zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Bezugsrakete von der Koordinate x_0 mit der Beschleunigung $\overrightarrow{a_0} = a_0 \cdot \overrightarrow{e_x}$ startet. Ferner sei S das natürliche Ruhesystem der Bezugsrakete. Es gelte also zwischen der Startkoordinate x_0 und der in momentanem Ruhesystem stets konstanten Beschleunigung a_0 die Beziehung $a_0 = a(x_0) = \dfrac{c^2}{x_0}$. Die Bezugsrakete an der Koordinate x_0 soll den Bezugskörper des Geradlinig Gleichmäßig Beschleunigten Bezugssystems darstellen. Das Koordinatensystem des Beschleunigten Bezugssystems stelle ich als zweimal gestrichelt dar. Das Geradlinig Gleichmäßig Beschleunigte Bezugssystem bezeichne ich im weiteren mit S''. So sollen die Achsen X und X'' , Y und Y'' sowie Z und Z'' parallel sein. Der Koordinatenursprung von S'' soll mit dem Koordinatenursprung von S übereinstimmen. Andere Raketen die mit der Bezugsrakete gleichzeitig von S aus starten und

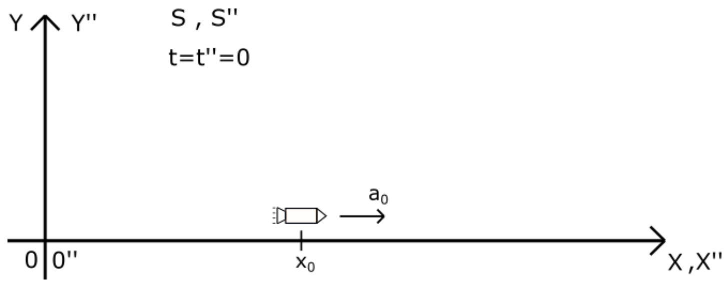


Abbildung 2

zu S'' gehören müssen der Gleichung (7) genügen. Mit diesen Vereinbarungen schreibe ich die Gleichung (1) nun mehr bezogen auf die Bezugsrakete als

$$a_x = \frac{a_0}{1 + \dfrac{a_0 \cdot x_0}{c^2}} \quad \text{mit den Abkürzungen} \quad a_x = a(x) \quad \text{und} \quad a_0 = a(x_0) \tag{9}$$

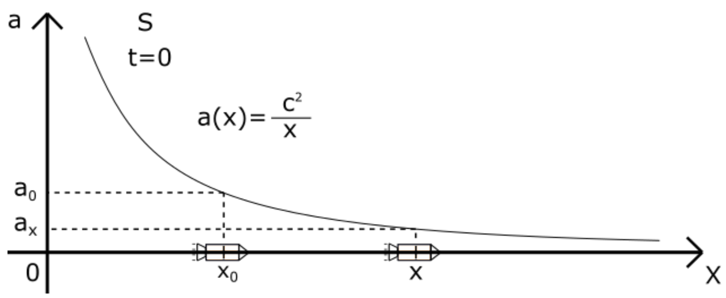


Abbildung 3

Tragen wir auf der vertikalen Achse die Beschleunigung ein, so sehen wir die Beschleunigungsstruktur von S'' siehe Abbildung 3.

1.3.1 Längenmessung

Definition 2 (Längenmessung in S'') *Die Längenmessung in S'' wird durch das aneinanderlegen von Maßstäben durchgeführt. Wobei ein Maßstab die gleiche Länge hat wie ein Maßstab im natürlichen Inertialsystem S von dem aus die Raketen gestartet sind.*

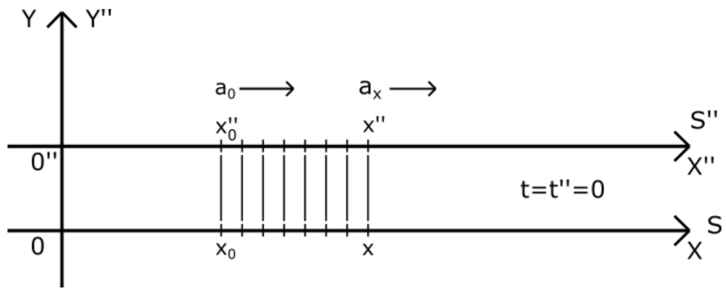


Abbildung 4

Für $t = 0$ ist S' identisch mit S . Der nächste Satz zeigt die Konsequenzen der so definierten Längenmessung in S'' von dem natürlichen momentanen Ruhesystem S' ausgesehen.

Satz 7 *Die Längenmessung in S'' liefert die gleichen Ergebnisse wie die Längenmessung des natürlichen momentanen Ruhesystems S'.*

Beweis 7 *Dieser Satz besagt Folgendes: Wird in S'' eine Länge $\Delta L''$ gemessen, und in S' für die selbe Länge $\Delta L'$ ermittelt, zu dem Zeitpunkt als S' das natürliche momentane Ruhesystem von S'' ist, so gilt von S' ausgesehen : $\Delta L'' = \Delta L'$. Da zum Zeitpunkt der Messung, S' das natürliche Ruhesystem von S'' ist, ruhen alle Maßstäbe von S''* ***gleichzeitig*** *in S' . Bei dieser* ***Gleichzeitigkeit*** *handelt es sich um die Gleichzeitigkeit von S'.*

Da ohne die Einführung der Zeitmessung die Gleichzeitigkeit in S'' nicht definiert ist, können wir nur die Messungen in S'' von S' ausgesehen bewerten. Eine direkte Konsequenz ist die unmittelbare Transformation von Ereigniskoordinaten. Findet an der X''-Koordinate von S'' an der Stelle x'' ein Ereignis statt, so hat das Ereignis in S' die X'-Koordinate $x' = x''$. Um die Gleichzeitig in S'' zu bestimmen führe ich als nächstes die Zeitmessung in S'' ein.

1.3.2 Zeitmessung

Es gilt die Zeitmessung in S'' mittels Lichtuhren einzuführen. Die entsprechenden Berechnungen werden von dem natürlichen Inertialsystem S aus, durchgeführt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird ein Lichtstrahl 0 von der Koordinate x_0'' in die Richtung von Spiegel 1 ausgesandt. Gleichzeitig in S verlässt ein Lichtstrahl 1 die Koordinate x_1'' in die Richtung von Spiegel 0 .

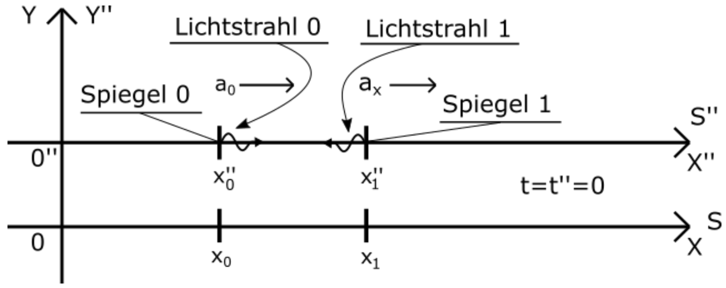


Abbildung 5

Nach der Reflexion vom Spiegel 1 kommt der Lichtstrahl 0 zum

Zeitpunkt $$t_0 = \frac{c}{2 \cdot a_0} \cdot \left(\frac{a_0^2}{a_x^2} - \frac{a_x^2}{a_o^2} \right) \tag{10}$$

wieder am Spiegel 0 an. Der Strahl 1 kommt nach der Reflexion am Spiegel 0 zum

Zeitpunkt $$t_x = \frac{c}{2 \cdot a_x} \cdot \left(\frac{a_0^2}{a_x^2} - \frac{a_x^2}{a_o^2} \right) \tag{11}$$

wieder am Spiegel 1 an. Zur Berechnung von (10) und (11) siehe Anhang 2.

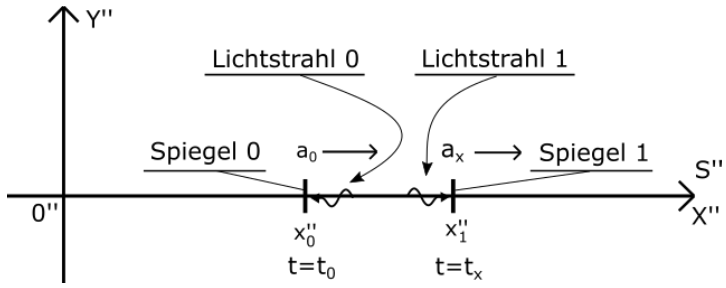


Abbildung 6

Die beiden Lichtstrahlen verließen Spiegel 0 und Spiegel 1 zum Zeitpunkt $t = 0$. Sie haben sich im Bezugssystem S gleichzeitig auf dem Weg gemacht. Doch da

$$a_0 \cdot t_0 = a_x \cdot t_x \tag{12}$$

gilt, also insbesondere $t_0 \neq t_x$, kamen sie in S nicht gleichzeitig wieder an ihrem Ausgangsort in S'' an.

Der folgende Satz bereitet die Definition der Gleichzeitigkeit in S'' vor.

Satz 8 *Es gibt ein Inertialsystem S' mit folgenden Eigenschaften.*

1. *Die beiden Ereignisse*
   a) Lichtstrahl 0 kehrt zum Spiegel 0 zurück.
   b) Lichtstrahl 1 kehrt zum Spiegel 1 zurück.
   sind in S' gleichzeitig.
2. *S' ist zu diesem Zeitpunkt das natürliche momentane Ruhsystem von S''.*

Beweis 8 *Spiegel* 0 *besitzt zum Zeitpunkt $t = t_0$ die Geschwindigkeit* $v_0 = \dfrac{a_0 \cdot t_0}{\sqrt{1 + \dfrac{a_0^2 \cdot t_0^2}{c^2}}}$

Spiegel 1 *besitzt zum Zeitpunkt $t = t_x$ die Geschwindigkeit* $v_x = \dfrac{a_x \cdot t_x}{\sqrt{1 + \dfrac{a_x^2 \cdot t_x^2}{c^2}}}$

Aus $a_0 \cdot t_0 = a_x \cdot t_x$ nach Gleichung (12) *folgt $v_0 = v_x$. Als die Lichtstrahlen* 0 *und* 1 *an den Spiegeln* 0 *und* 1 *wieder ankommen, haben diese die gleiche Geschwindigkeit. Also gibt es ein Inertialsystem S' in dem sie beide ruhen und genau zu diesem Zeitpunkt passieren ja die beiden Ereignisse. Also sind sie in S' gleichzeitig. Durch Koordinatenanpassung erhalten wir dann daraus ein natürliches Inertialsystem.*

Verlassen also die Lichtstrahlen 0 und 1 die Spiegeln 0 und 1 gleichzeitig in momentanem Ruhesystem so kommen sie nach der Reflexion am anderen Spiegel wieder gleichzeitig in momentanem Ruhesystem an den ursprünglichen Spiegeln an. Im Bezugssystem S'' sieht die Sache folgendermaßen aus. Die beiden Lichtstrahlen legen die gleiche Strecke zurück.

- Lichtstrahl 0 legt die Strecke : Spiegel 0 $\longrightarrow$ Spiegel 1 $\longrightarrow$ Spiegel 0 zurück.
- Lichtstrahl 1 legt die Strecke : Spiegel 1 $\longrightarrow$ Spiegel 0 $\longrightarrow$ Spiegel 1 zurück.

Beide Lichtstrahlen legen einmal die Strecke : Spiegel 0 $\longrightarrow$ Spiegel 1
und einmal die Strecke : Spiegel 1 $\longrightarrow$ Spiegel 0 zurück.

Da aber in S'' der Zustand statisch ist, spielt die Reihenfolge keine Rolle. Hieraus folgt in S'': Würden die Lichtstrahlen sich gleichzeitig auf den Weg machen, würden sie auch gleichzeitig wieder zu ihrem Ursprungsort zurückkehren. Hier muss man aber bedenken, dass es keine Möglichkeit in S'' gibt, herauszufinden wie viel Zeit ein Lichtstrahl allein für die halbe Strecke zum Beispiel für Spiegel 0 $\longrightarrow$ Spiegel 1 benötigt. Diese Zeit muss daher Axiomatisch definiert werden.

Axiom 1 *Die Lichtgeschwindigkeit ist in S'' entlang der X''-Achse isotrop.*

Die Lichtgeschwindigkeit ist also richtungsunabhängig. Nach diesen Vorbereitungen können wir die Gleichzeitigkeit in S'' definieren.

Definition 3 *Die Gleichzeitigkeit von S'' ist identisch mit der Gleichzeitigkeit eines natürlichen Inertialsystems S welches zum Zeitpunkt der Gleichzeitigkeit das momentane Ruhesystem von S'' ist.*

Sehen wir die Lichtaussendung von der Koordinate x_0'' nochmal an. Der Lichtstrahl 0 legte die Strecke zu der Koordinate x_1'' hin und zurück. Für das natürliche Inertialsystem

S verging dabei die Zeit $t_0 = \dfrac{c}{2 \cdot a_0} \cdot \left(\dfrac{a_0^2}{a_x^2} - \dfrac{a_x^2}{a_o^2} \right)$ siehe Gleichung (10) .

An der Koordinate x_0'' verging dabei die Zeit

$$\Delta\tau_0 = 2 \cdot \frac{c}{a_0} \cdot ln \left(\frac{a_0}{a_x} \right) \tag{13}$$

Während auf der anderen Seite der Lichtstrahl 1 die Strecke zu der Koordinate x_0'' hin und zurücklegte und dafür im natürlichen Inertialsystem S

die Zeit $t_x = \dfrac{c}{2 \cdot a_x} \cdot \left(\dfrac{a_0^2}{a_x^2} - \dfrac{a_x^2}{a_o^2} \right)$ verging, verging an der Koordinate x_1'' die Zeit

$$\Delta\tau_x = 2 \cdot \frac{c}{a_x} \cdot ln \left(\frac{a_0}{a_x} \right) \tag{14}$$

Zur Herleitung der Gleichungen (13) und (14) siehe Anhang 3 .
Obwohl in S'' die Lichtstrahlen 0 und 1 die gleiche Strecke zurückgelegt haben, konnten wir mit der Hilfe von S berechnen, dass an den Koordinaten x_0'' und x_1'' unterschiedliche Zeiten $\Delta\tau_0$ und $\Delta\tau_x$ vergingen. Aus den Gleichungen (13) und (14) folgt

$$a_0 \cdot \Delta\tau_0 = a_x \cdot \Delta\tau_x \tag{15}$$

damit $\Delta\tau_0 < \Delta\tau_x$ für $a_x < a_0$. Der Inhalt des folgenden Satzes ist damit eigentlich schon bewiesen. Aber wegen der enormen Bedeutung, die von diesem Satz ausgeht, möchte ich ihn dennoch zur Betonung als Satz formulieren.

Satz 9 (Verlangsamung der Zeit)
Die Zeit vergeht in S'' an der Koordinate x_0'' langsamer als an der Koordinate x_1'' .

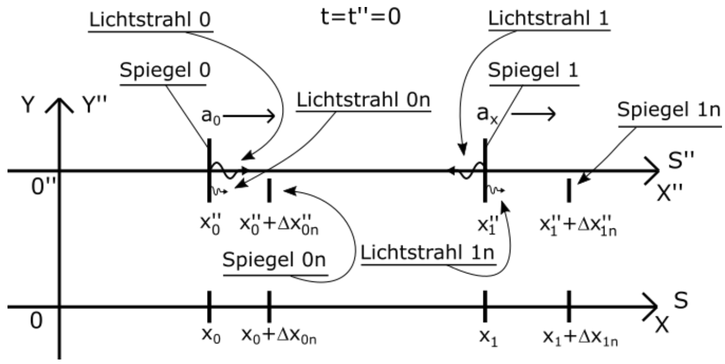


Abbildung 7

Ich möchte als nächstes an den Koordinaten x_0'' und x_1'' lokale Uhren konstruieren und damit die Zeitmessung vervollständigen. Zu diesem Zweck werden die zusätzlichen Spiegeln 0_n und 1_n wie in der Abbildung 7 angebracht. Durch die Einführung eines zusätzlichen Spiegels 0_n wird an der Koordinate x_0'' eine lokale Uhr konstruiert. Die Strecke Δx_{0n} wird so festgelegt, dass wenn der Lichtstrahl 0 die Strecke zu der Koordinate x_1'' einmal hin und zurücklegt, so soll der Lichtstrahl 0_n die Strecke zu dem Spiegel 0_n an der Koordinate $x_0'' + \Delta x_{0n}''$ n-mal hin und zurücklegen. Dabei sollen die Lichtstrahlen 0 und 0_n den Spiegel 0 gleichzeitig verlassen und gleichzeitig erreichen. Damit gilt einerseits $\Delta\tau_0 = n \cdot \Delta\tau_{0n}$ und andererseits $\Delta\tau_{0n} = 2 \cdot \frac{c}{a_0} \cdot ln\left(\frac{a_0}{a_{0n}}\right)$ siehe Gleichung (13)

Setzen wir sie gleich $2 \cdot \frac{c}{a_0} \cdot ln\left(\frac{a_0}{a_x}\right) = n \cdot 2 \cdot \frac{c}{a_0} \cdot ln\left(\frac{a_0}{a_{0n}}\right)$ oder $\frac{a_0}{a_{0n}} = \left(\frac{a_0}{a_x}\right)^{\frac{1}{n}}$

mit $\frac{a_0}{a_{0n}} = 1 + \frac{a_0 \cdot \Delta x_{0n}}{c^2}$ ergibt sich der Abstand zwischen Spiegel 0 und 0_n zu

$$\Delta x_{0n} = \frac{c^2}{a_0} \cdot \left(\left(1 + \frac{a_0 \cdot (x_1 - x_0)}{c^2}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right) \tag{16}$$

Entsprechend ergibt sich für den Abstand zwischen Spiegel 1 und Spiegel 1_n

$$\Delta x_{xn} = \frac{c^2}{a_x} \cdot \left(\left(1 + \frac{a_0 \cdot (x_1 - x_0)}{c^2}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right) \tag{17}$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt dann

$$a_0 \cdot \Delta x_{0n} = a_x \cdot \Delta x_{xn} \tag{18}$$

und aus $a_0 \cdot \Delta\tau_0 = a_x \cdot \Delta\tau_x$ oder $a_0 \cdot n \cdot \Delta\tau_{0n} = a_x \cdot n \cdot \Delta\tau_{xn}$ folgt

$$a_0 \cdot \Delta\tau_{0n} = a_x \cdot \Delta\tau_{xn} \tag{19}$$

Wenn also an der Koordinate x''_0 die so konstruierte lokale Uhr einmal tickt, dann tickt auch die an der Koordinate x''_1 derart konstruierte lokale Uhr einmal. Sei $\Delta\tau$ die Zeit die ein Lichtstrahl braucht um die Strecke: Spiegel 0 $\longrightarrow$ Spiegel 1_n $\longrightarrow$ Spiegel 0 zurückzulegen. Dann gilt :

$$\Delta\tau = 2 \cdot \frac{c}{a_0} \cdot ln\left(\frac{a_0}{a_{xn}}\right) = 2 \cdot \frac{c}{a_0} \cdot ln\left(\frac{a_0}{a_x} \cdot \frac{a_x}{a_{xn}}\right) = 2 \cdot \frac{c}{a_0} \cdot ln\left(\frac{a_0}{a_x}\right) + 2 \cdot \frac{c}{a_0} \cdot ln\left(\frac{a_x}{a_{xn}}\right)$$
$$\stackrel{13}{=} n \cdot \Delta\tau_{0n} + 2 \cdot \frac{c}{a_x} \cdot \frac{a_x}{a_0} \cdot ln\left(\frac{a_x}{a_{xn}}\right) \stackrel{14}{=} n \cdot \Delta\tau_{0n} + \frac{a_x}{a_0} \cdot \Delta\tau_{xn} \stackrel{19}{=} n \cdot \Delta\tau_{0n} + \Delta\tau_{0n}$$
$$= (n+1) \cdot \Delta\tau_{0n}$$

D.h. die lokalen Uhren gehen synchron. Verlassen nämlich zwei Lichtstrahlen Spiegel 0 und Spiegel 1 in natürlichem momentanem Ruhesystem gleichzeitig, und werden an Spiegel $0n$ und Spiegel $1n$ zurück reflektiert, so kommen sie in natürlichem momentanem Ruhesystem gleichzeitig wieder an Spiegel 0 und Spiegel 1 an.
Man beachte aber dass Δx_{xn} in der Gleichung $a_0 \cdot \Delta x_{0n} = a_x \cdot \Delta x_{xn}$ divergent wird wenn wir $a_0 = 10\frac{m}{s^2}$ und $\Delta x_{0n} = 1m$ fest wählen und a_x beliebig klein machen.

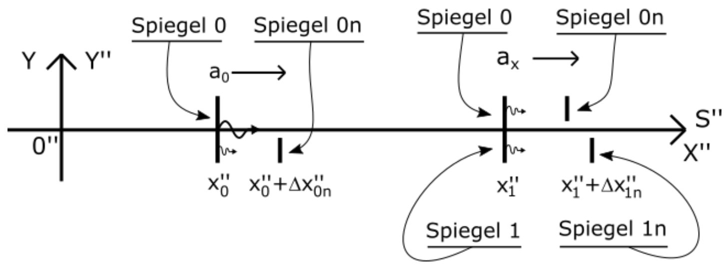


Abbildung 8

Stellen wir uns jetzt vor, die lokale Uhr an der Koordinate x''_0 würde man zu der lokalen Uhr an der Koordinate x''_1 transportieren. Siehe Abbildung 8 . Der direkte und damit auch lokale Vergleich der Abstände zwischen den Spiegeln zeigt, dass wir keine identischen Uhren konstruiert haben. Wir haben lediglich Uhren konstruiert die Synchron gehen, solange sie dort bleiben wo sie konstruiert worden sind. Aus dem direkten Vergleich der Abstände $\Delta x''_{0n}$ und $\Delta x''_{1n}$ kann in S'' auf die Richtigkeit des Satzes **??** geschlossen werden. Per Definition wählen die Uhr von x''_0 zur Systemuhr und die Zeit die vergeht wenn diese Uhr einmal tickt, zu der Zeiteinheit.

1.3.3 Uhrensynchronisation auf der X''-Achse

Es gilt in S'' zwei Uhren, die sich an den Koordinaten x''_0 und x'' befinden zu synchronisieren. Sei S wieder das natürliche Inertialsystem welches zum Zeitpunkt $t = 0$ auch das momentane Ruhesystem von S'' ist. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird ein Lichtstrahl von der Koordinate x''_0 in Richtung x'' ausgesandt. Der Lichtstrahl kommt an der Koordinate x'' zum Zeitpunkt (zur Berechnung siehe Anhang 2)

$$t_1 = \frac{c}{2 \cdot a_x} \cdot \left(\frac{a_0}{a_x} - \frac{a_x}{a_0} \right) \tag{20}$$

an. Aus $t = \frac{c}{a} \cdot sinh \left(\frac{a \cdot \tau}{c} \right)$ (siehe Anhang 3 Gleichung A3G3) können wir die verstrichenen Zeiten an den Koordinaten x''_0 und x'' berechnen. Wenn der Lichtstrahl an der Koordinate x'' ankommt ist an der Koordinate x''_0 die Zeit

$$\tau_{x''_0} = \frac{c}{a_0} \cdot ln \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a_0^2}{a_x^2} - 1 \right) + \sqrt{1 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{a_0^2}{a_x^2} - 1 \right)^2} \right) \tag{21}$$

und an der Koordinate x'' die Zeit

$$\tau_{x''} = \frac{c}{a_x} \cdot ln \left(\frac{a_0}{a_x} \right) \tag{22}$$

vergangen. Da während das hin und her pendeln des Lichtstrahls zwischen den Koordinaten x''_0 und x'' an der Koordinate x'' die Zeit $\Delta\tau_x = 2 \cdot \frac{c}{a_x} \cdot ln \left(\frac{a_0}{a_x} \right)$ vergeht und wegen Axiom 1 der Lichtstrahl für den Hinweg genauso lange benötigt wie für den Rückweg wird in S'' angenommen, dass an der Koordinate x''_0 die Zeit $\frac{1}{2} \cdot \Delta\tau_x = \frac{c}{a_x} \cdot ln \left(\frac{a_0}{a_x} \right)$ verstrichen ist. Daher wird die Uhr an der Koordinate x'' bei der Ankunft des Lichtstrahl auf diese Zeit gesetzt. Diese Zeit entspricht aber nach Gleichung 22 in S der tatsächlich an der Koordinate x'' verstrichenen Zeit. Folglich gelingt die Synchronisation in S'' von S ausgesehen, und bei der Transformation von Ereigniskoordinaten wird es kein Korrekturterm wie bei den speziellen Lorentz-Transformationsgleichungen geben.

Satz 10 *Zwei Uhren auf der X''-Achse lassen sich in S'' vom Bezugssystem S ausgesehen exakt synchronisieren. Daher hat die Zeittransformation zwischen S und S'' die folgende Form :*

$$t = \frac{c}{a} \cdot sinh \left(\frac{a \cdot \tau}{c} \right) \quad \textit{wobei} \quad a = \frac{c^2}{x} \quad \textit{die Beschleunigung von S ausgesehen ist.}$$

Von S" ausgesehen liegt aber ein Feld vor und es gilt $a_{x''} = -\dfrac{c^2}{x''}$. *setzen wir dies oben ein so erhalten wir die endgültige Transformationsgleichung für die Zeit. Dabei habe ich* $\tau_{x''}$ *anstatt* τ *geschrieben um darauf hinzuweisen dass,* τ *sich auf die Koordinate* x'' *bezieht.*

$$t = -\frac{c}{a_{x''}} \cdot sinh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right) = \frac{c}{a_{x''}} \cdot sinh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right) \tag{23}$$

1.3.4 Uhrensynchronisation auf der Y'' und Z''-Achse

Sei zum Zeitpunkt $t = 0$, S das natürliche Inertialsystem von S'' . An den Koordinaten $(x''_0, 0)$ und (x''_0, y'') sollen sich zwei Uhren befinden die synchronisiert werden sollen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird ein Lichtstrahl von der Koordinate $(x''_0, 0)$ zu der Koordinate (x''_0, y''_0) gesendet. Siehe Abbildung 9 .

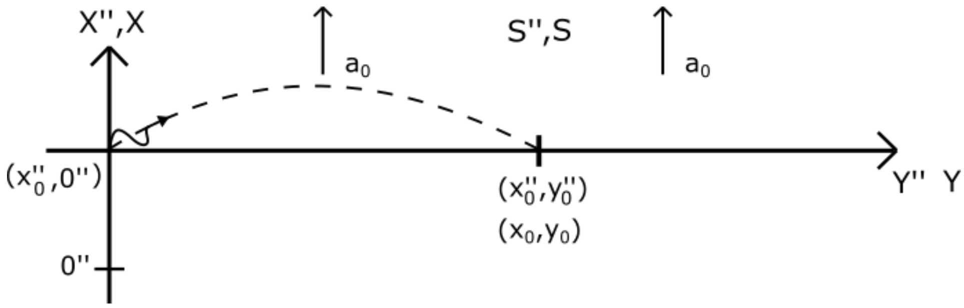


Abbildung 9

Der Lichtstrahl kommt zu dem Zeitpunkt (Siehe Anhang 4 für die Berechnungen)

$$t_1 = \frac{y_0}{c} \cdot \sqrt{1 + \frac{a_0^2 \cdot y_0^2}{4 \cdot c^4}} \tag{24}$$

an der Koordinate (x''_0, y''_0) an. Und nach der Reflexion dort erreicht er zum Zeitpunkt

$$t_2 = 2 \cdot \frac{y_0}{c} \cdot \left(1 + \frac{a_0^2 \cdot y_0^2}{2 \cdot c^4}\right) \cdot \sqrt{1 + \frac{a_0^2 \cdot y_0^2}{4 \cdot c^4}} \tag{25}$$

wieder die Koordinate $(x''_0, 0'')$. An den Koordinaten $(x''_0, 0'')$ und (x''_0, y''_0) vergehen dabei die Zeiten

$$\tau_1 = 2 \cdot \frac{c}{a_0} \cdot ln \left(\frac{a_0 \cdot y_0}{2 \cdot c^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{a_0 \cdot y_0}{2 \cdot c^2}\right)^2} \right) \tag{26}$$

für den Hinflug und

$$\tau_2 = 4 \cdot \frac{c}{a_0} \cdot ln \left(\frac{a_0 \cdot y_0}{2 \cdot c^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{a_0 \cdot y_0}{2 \cdot c^2}\right)^2} \right) \tag{27}$$

nach dem Rückflug. In S'' benötigt wie wir sehen der Lichtstrahl für hin und zurück die gleiche Zeit. Deswegen wird eine Uhr an der Koordinate $(x''_0, y''_0$ bei Ankunft des Lichtstrahls auf die Zeit $\frac{\tau_2}{2}$ gesetzt. Da dies τ_1 entspricht, also der tatsächlich vergangenen Zeit seit der Emission des Lichtstrahls, ist die Synchronisation vom Bezugssystem S ausgesehen korrekt.

Satz 11 *Zwei Uhren mit der gleichen X''-Koordinate aber mit unterschiedlichen Y''-Koordinaten (oder Z''-Koordinaten) lassen sich in S'' vom Bezugssystem S ausgesehen exakt synchronisieren so dass sie fortan die gleiche Zeit anzeigen.*

1.3.5 Geschwindigkeitsmessung auf der $X'' - Achse$

Es soll die Geschwindigkeit einer Probemasse m , die sich entlang der X''-Achse bewegt an der Koordinate $(x''_1, 0, 0)$ gemessen werden. Dafür seien schon an den Koordinaten $(x''_1, 0, 0)$ und $(x''_2, 0, 0)$ zwei Uhren angebracht und schon synchronisiert. Um die Geschwindigkeit einer Probemasse m zu bestimmen benötigen wir in S'' zwei Ereignisse. Sei also $E_1 = (x''_1, \tau_{11})$ das Ereignis, wenn die Probemasse m die Koordinate $(x''_1, 0, 0)$ passiert. Sei $E_2 = (x''_2, \tau_{22})$ das Ereignis, wenn die Probemasse m die Koordinate $(x''_2, 0, 0)$ passiert. Siehe Abbildung 10

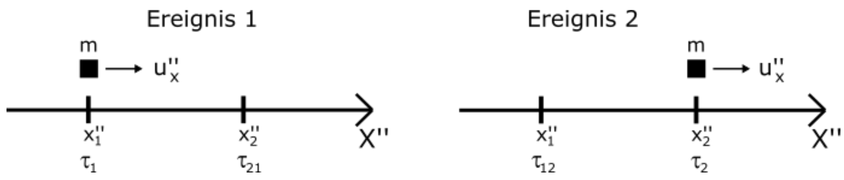


Abbildung 10

Die Tatsache, dass die Zeit an den Koordinaten $(x''_1, 0, 0)$ und $(x''_2, 0, 0)$ unterschiedlich schnell vergeht müssen wir bei der Bestimmung der Geschwindigkeit berücksichtigen. Um das zu erreichen setze ich folgendermaßen an.

$$u''_x = \frac{x''_2 - x''_1}{\tau_{12} - \tau_{11}} \qquad \text{mit} \qquad a_{x''_1} \cdot \tau_{12} = a_{x''_2} \cdot \tau_{22} \tag{28}$$

$$u''_x = a_{x''_1} \cdot \frac{x''_2 - x''1}{a_{x''_2} \cdot \tau_{22} - a_{x''_1} \cdot \tau_{11}} = a_{x''} \cdot \frac{dx''}{d\left(a_{x''} \cdot \tau_{x''}\right)} \tag{29}$$

Gleichung 28 ergibt insofern einen Sinn weil die Messung lokal ist und x''_2 ja beliebig an x''_1 heranrückt.Zu beachten ist dabei dass ich nicht gleich durch die Differenz der Ereigniskoordinaten teile. In der Gleichung 29 kommen dann nur noch die Ereigniskoordinaten vor, allerdings erfolgt die Ableitung nicht mehr allein nach der Zeit sondern nach dem Produkt aus Ortsbeschleunigung und Ortszeit. Selbstverständlich ist das zuerst einmal theoretisch von belang während eine alltägliche Geschwindigkeitsmessung diese Genauigkeit nicht bedarf. Das Produkt aus Ortsbeschleunigung und Ortszeit ist anscheinend eine Invariante Größe und ich werde ab jetzt ausschließlich nach diesem Produkt ableiten. In der Gleichung **??** schreibe ich $\tau_{x''}$ anstatt von τ um zum Ausdruck zubringen dass die Zeit lokal ist und an den betreffenden Koordinaten abgelesen wird. Entsprechend kann man für u''_y und u''_z folgendes herleiten

$$u''_y = a_{x''} \cdot \frac{dy''}{d\left(a_{x''} \cdot \tau_{x''}\right)} \qquad \text{und} \qquad u''_z = a_{x''} \cdot \frac{dz''}{d\left(a_{x''} \cdot \tau_{x''}\right)} \tag{30}$$

Für zwei Ereignisse mit der gleichen X''-Koordinate, würde dann für u''_y folgen

$$u''_y = a_{x''_0} \cdot \frac{dy''}{d\left(a_{x''} \cdot \tau_{x''}\right)} = a_{x''_0} \cdot \frac{dy''}{\left(a_{x''_0} \cdot \tau_{22} - a_{x''_0} \cdot \tau_{11}\right)} = \frac{dy''}{\tau_{22} - \tau_{11}} = \frac{dy''}{d\tau}$$

Dennoch werde ich aus Symmetrie Gründen die Gleichung 30 bevorzugen.

1.3.6 Beschleunigungsmessung auf der $X'' - Achse$

Um die Beschleunigung einer Probemasse m zu bestimmen sind drei Ereignisse notwendig. Siehe Abbildung 11

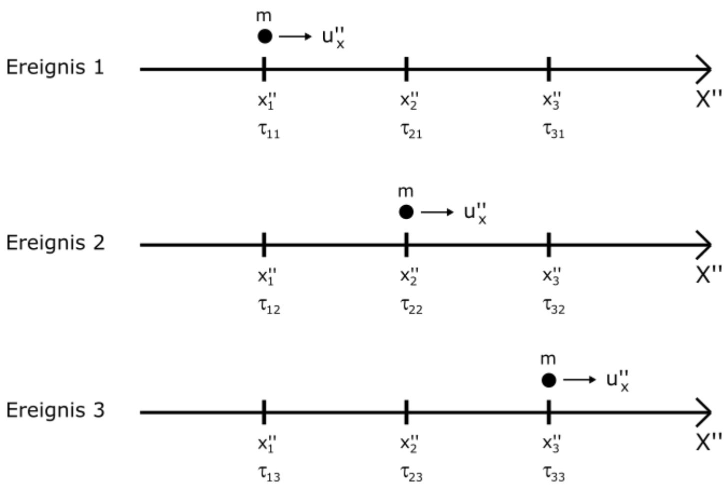


Abbildung 11

Für die drei Ereignisse gelten lokal: $E_1 = (x''_1, \tau_{11})$, $E_2 = (x''_2, \tau_{22})$, $E_3 = (x''_3, \tau_{33})$. Daraus können wir die mittlere Beschleunigung berechnen.

$$\alpha''_{x_2} = \frac{\dfrac{x''_3 - x''_2}{\tau_{23} - \tau_{22}} - \dfrac{x''_2 - x''_1}{\tau_{22} - \tau_{21}}}{\tau_{23} - \tau_{21}} \tag{31}$$

Mit den Beziehungen $\quad a_{x''_1} \cdot \tau_{11} = a_{x''_2} \cdot \tau_{21}$ und $a_{x''_2} \cdot \tau_{23} = a_{x''_3} \cdot \tau_{33}$

$$\alpha''_{x_2} = \frac{\dfrac{x''_3 - x''_2}{\dfrac{a_{x''_3}}{a_{x''_2}} \cdot \tau_{33} - \tau_{22}} - \dfrac{x''_2 - x''_1}{\tau_{22} - \dfrac{a_{x''_1}}{a_{x''_2}} \cdot \tau_{11}}}{\dfrac{a_{x''_3}}{a_{x''_2}} \cdot \tau_{33} - \dfrac{a_{x''_1}}{a_{x''_2}} \cdot \tau_{11}}$$

$$\alpha''_{x_2} = \lim_{a_{x''_3} \cdot \tau_{33} \to a_{x''_2} \cdot \tau_{22}} a_{x''_2} \cdot \frac{a_{x''_2} \cdot \dfrac{x''_3 - x''_2}{a_{x''_3} \cdot \tau_{33} - a_{x''_2} \cdot \tau_{22}} - a_{x''_2} \cdot \dfrac{x''_2 - x''_1}{a_{x''_2} \cdot \tau_{22} - a_{x''_1} \cdot \tau_{11}}}{a_{x''_3} \cdot \tau_{33} - a_{x''_1} \cdot \tau_{11}}$$

$$\alpha''_{x_2} = a_{x''_2} \cdot \frac{u''_{x_2 x_3} - u''_{x_1 x_2}}{a_{x''_3} \cdot \tau_{33} - a_{x''_1} \cdot \tau_{11}}$$

$$\alpha''_{x_2} = \lim_{a_{x''_3}\cdot\tau_{33} \to a_{x''_2}\cdot\tau_{22}} a_{x''_2} \cdot \frac{u''_{x_2x_3} - u''_{x_1x_2}}{a_{x''_3} \cdot \tau_{33} - a_{x''_1} \cdot \tau_{11}} = a_{x''_2} \cdot \frac{du''_{x_2}}{d\left(a_{x''} \cdot \tau_{x''}\right)}$$

oder allgemeiner formuliert

$$\alpha''_x = a_{x''} \cdot \frac{du''_x}{d\left(a_{x''} \cdot \tau_{x''}\right)} \tag{32}$$

$$\alpha''_y = a_{x''} \cdot \frac{du''_y}{d\left(a_{x''} \cdot \tau_{x''}\right)} \tag{33}$$

$$\alpha''_z = a_{x''} \cdot \frac{du''_z}{d\left(a_{x''} \cdot \tau_{x''}\right)} \tag{34}$$

1.3.7 Transformationsgleichungen

Sehen wir uns jetzt die Transformation der Ereigniskoordinaten an. Gegeben sei das geradlinig gleichmäßig beschleunigte Bezugssystem S'' sowie dessen natürliche Inertialsystem S zum Zeitpunkt $t = 0$.Sei $E = (x, 0, 0, t)$ ein Ereignis mit $x > c \cdot t$ in S und S''.

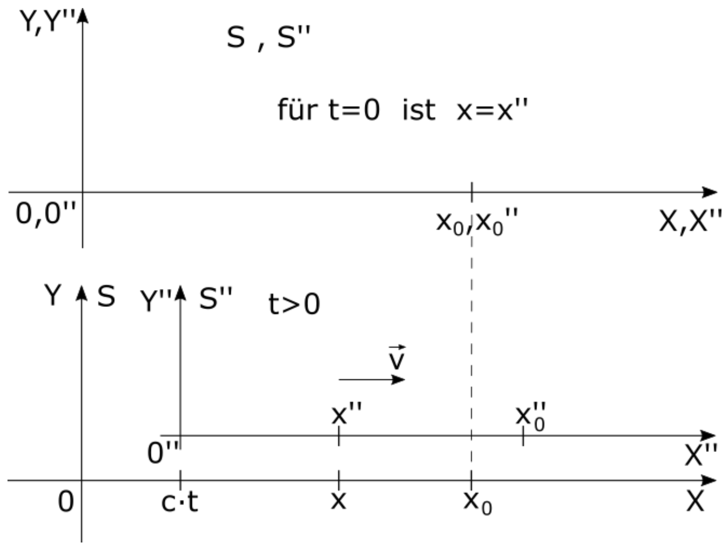


Abbildung 12

In S gilt dann für die x''-Koordinate des Ereignisses in S'' mit der Gleichung (23)

$$x(t) = \frac{c^2}{a_x} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{a_x^2 \cdot t^2}{c^2}} - 1 \right) + x(t=0) \quad \text{mit} \quad \sqrt{1 + \frac{a_x^2 \cdot t^2}{c^2}} = cosh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c} \right)$$

$$x(t) = -\frac{c^2}{a_{x''}} \cdot cosh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c} \right) + \frac{c^2}{a_{x''}} + x(t=0) \text{ dabei wurde } a_x = -a_{x''} \quad \text{benutzt.}$$

da $\quad x(t=0) = x'' \quad$ ist folgt $\quad \frac{c^2}{a_{x''}} + x(t=0) = -\frac{c^2}{c^2} \cdot x'' + x'' = 0$.

Damit erhalten wir mit $x = x(t)$ insgesamt die Transformationsgleichungen :

$$x = x'' \cdot cosh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c} \right) \quad , y = y'' \quad , z = z'' \tag{35}$$

$$t = \frac{x''}{c} \cdot sinh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c} \right) \tag{36}$$

Differenzieren wir einmal um die Geschwindigkeitstransformation zu erhalten

$$dx = dx'' \cdot cosh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right) + x'' \cdot sinh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right) \cdot \frac{d\left(a_{x''} \cdot \tau_{x''}\right)}{c} \tag{37}$$

$$dy = dy'' \quad , \quad dz = dz'' \tag{38}$$

$$dt = -\frac{dx''}{c} \cdot sinh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right) - \frac{x''}{c} \cdot cosh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right) \cdot \frac{d\left(a_{x''} \cdot \tau_{x''}\right)}{c} \tag{39}$$

$$u_x = \frac{dx'' \cdot cosh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right) + x'' \cdot sinh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right) \cdot \frac{d\left(a_{x''} \cdot \tau_{x''}\right)}{c}}{-\frac{dx''}{c} \cdot sinh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right) - \frac{x''}{c} \cdot cosh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right) \cdot \frac{d\left(a_{x''} \cdot \tau_{x''}\right)}{c}}$$

$$u_x = \frac{\frac{dx''}{d\left(a_{x''} \cdot \tau_{x''}\right)} \cdot cosh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right) + \frac{x''}{c} \cdot sinh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)}{-\frac{\frac{dx''}{d\left(a_{x''} \cdot \tau_{x''}\right)}}{c} \cdot sinh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right) - \frac{x''}{c^2} \cdot cosh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)} \quad \text{mit} \quad a_{x''} = -\frac{c^2}{x''}$$

$$u_x = \frac{\frac{dx''}{d\left(a_{x''} \cdot \tau_{x''}\right)} \cdot cosh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right) - \frac{c}{a_{x''}} \cdot sinh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)}{-\frac{\frac{dx''}{d\left(a_{x''} \cdot \tau_{x''}\right)}}{c} \cdot sinh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right) + \frac{1}{a_{x''}} \cdot cosh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)}$$

$$u_x = \frac{a_{x''} \cdot \frac{dx''}{d\left(a_{x''} \cdot \tau_{x''}\right)} - c \cdot tanh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)}{-\frac{a_{x''} \cdot \frac{dx''}{d\left(a_{x''} \cdot \tau_{x''}\right)}}{c} \cdot tanh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right) + 1} = \frac{u''_x + c \cdot tanh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)}{1 + \frac{u''_x}{c} \cdot tanh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)}$$

$$u_x = \frac{u''_x + c \cdot tanh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)}{1 + \frac{u''_x}{c} \cdot tanh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)} \tag{40}$$

mit $v = c \cdot tanh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)$ als relativ Geschwindigkeit zwischen x'' und x erhalten wir die Einstein'sche Addition der Geschwindigkeiten.

$$u_x = \frac{u''_x + v}{1 + \frac{u''_x \cdot v}{c^2}}$$

Für u_y folgt

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy''}{-\frac{dx''}{c} \cdot sinh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right) - \frac{x''}{c} \cdot cosh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right) \cdot \frac{d\left(a_{x''} \cdot \tau_{x''}\right)}{c}}$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\frac{dy''}{d\left(a_{x''} \cdot \tau_{x''}\right)}}{-\frac{\frac{dx''}{d\left(a_{x''} \cdot \tau_{x''}\right)}}{c} \cdot sinh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right) + \frac{1}{a_{x''}} \cdot cosh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)}$$

$$u_y = \frac{a_{x''} \cdot \frac{dy''}{d\left(a_{x''} \cdot \tau_{x''}\right)}}{-\frac{a_{x''} \cdot \frac{dx''}{d\left(a_{x''} \cdot \tau_{x''}\right)}}{c} \cdot sinh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right) + cosh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)}$$

$$u_y = \frac{u''_y}{cosh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right) + \frac{u''_x}{c} \cdot sinh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)} \tag{41}$$

$$u_y = \frac{u''_y \cdot \frac{1}{cosh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)}}{1 + \frac{u''_x}{c} \cdot tanh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)} \quad \text{mit} \quad v = c \cdot tanh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right) \quad \text{erhalten wir}$$

$$u_y = \frac{u''_y \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u''_x \cdot v}{c^2}} \quad \text{entspricht der Geschwindigkeitstransformation aus der SRT}$$

Entsprechend erhalten wir für die z-Komponente der Geschwindigkeit

$$u_z = \frac{u''_z}{cosh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right) + \frac{u''_x}{c} \cdot sinh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)} \tag{42}$$

Durch nochmaliges Differenzieren von Gleichung (40) erhalten wir

$$du_x = d\left(a_{x''} \cdot \tau_{x''}\right) \cdot \frac{\frac{du''_x}{d\left(a_{x''} \cdot \tau_{x''}\right)} - \left(1 - \frac{u''^2_x}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{u''_x}{c} \cdot tanh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)\right)^2} \cdot \frac{1}{cosh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)^2}$$

und zusammen mit der Gleichung (39)folgt

$$\alpha_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{d\left(a_{x''} \cdot \tau_{x''}\right) \cdot \frac{\frac{du''_x}{d\left(a_{x''} \cdot \tau_{x''}\right)} - \left(1 - \frac{u''^2_x}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{u''_x}{c} \cdot tanh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)\right)^2} \cdot \frac{1}{cosh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)^2}}{-\frac{dx''}{c} \cdot sinh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right) - \frac{x''}{c^2} \cdot cosh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right) \cdot d\left(a_{x''} \cdot \tau_{x''}\right)}$$

und nach einigen Umformungen erhalten wir die x-Komponente der Beschleunigungstransformation

$$\alpha_x = \frac{\alpha''_x - a_{x''} \cdot \left(1 - \frac{u''^2_x}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{u''_x}{c} \cdot tanh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)\right)^3} \cdot \frac{1}{cosh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)^3} \tag{43}$$

Verwenden wir wieder die Relativgeschwindigkeit zwischen x und x'' so folgt

$$\alpha_x = \frac{\left(\alpha''_x - a_{x''} \cdot \left(1 - \frac{u''^2_x}{c^2}\right)\right) \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1 + \frac{u''_x \cdot v}{c^2}\right)^3} \tag{44}$$

Differenzieren wir Gleichung (41) so folgt mit der Gleichung (39)

$$\alpha_y = \frac{du''_y}{dt} = \frac{\alpha''_y \cdot \left[1 + \frac{u''_x}{c} \cdot tanh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)\right] + \frac{a_{x''} \cdot u''_y}{c} \cdot \left[\frac{u''_x}{c} + tanh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)\right]}{cosh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)^2 \cdot \left[1 + \frac{u''_x}{c} \cdot tanh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)\right]^3}$$

$$- \frac{\frac{\alpha''_x \cdot u''_y}{c} \cdot tanh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)}{cosh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)^2 \cdot \left[1 + \frac{u''_x}{c} \cdot tanh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)\right]^3} \tag{45}$$

entsprechend folgt für die z-Komponente

$$\alpha_z = \frac{du''_z}{dt} = \frac{\alpha''_z \cdot \left[1 + \frac{u''_x}{c} \cdot tanh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)\right] + \frac{a_{x''} \cdot u''_z}{c} \cdot \left[\frac{u''_x}{c} + tanh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)\right]}{cosh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)^2 \cdot \left[1 + \frac{u''_x}{c} \cdot tanh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)\right]^3}$$

$$- \frac{\frac{\alpha''_x \cdot u''_z}{c} \cdot tanh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)}{cosh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)^2 \cdot \left[1 + \frac{u''_x}{c} \cdot tanh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)\right]^3} \tag{46}$$

Wenn wir wieder die Relativgeschwindigkeit v verwenden werden die Beziehungen etwas übersichtlicher und wir erhalten die aus der SRT bekannten Gleichungen.

$$\alpha_y = \frac{du''_y}{dt} = \frac{\alpha''_y \cdot \left[1 + \frac{u''_x \cdot v}{c^2}\right] + a_{x''} \cdot \left[\frac{(u''_x + v) \cdot u''_y}{c^2}\right] - \alpha''_x \cdot \frac{u''_y \cdot v}{c^2}}{\left[1 + \frac{u''_x \cdot v}{c^2}\right]^3} \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \tag{47}$$

$$\alpha_z = \frac{du''_z}{dt} = \frac{\alpha''_z \cdot \left[1 + \frac{u''_x \cdot v}{c^2}\right] + a_{x''} \cdot \left[\frac{(u''_x + v) \cdot u''_z}{c^2}\right] - \alpha''_x \cdot \frac{u''_z \cdot v}{c^2}}{\left[1 + \frac{u''_x \cdot v}{c^2}\right]^3} \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \tag{48}$$

1.3.8 Umkehr-Transformationsgleichungen

Aus den Gleichungen (35) und (36) folgt durch Umformung (siehe Anhang 5)

$$x'' = \sqrt{x^2 - c^2 \cdot t^2} \tag{49}$$

$$a_{x''} \cdot \tau_{x''} = -\frac{1}{2} \cdot c \cdot ln\left(\frac{x + c \cdot t}{x - c \cdot t}\right) \tag{50}$$

hieraus folgt weiter

$$dx'' = dt \cdot \frac{x \cdot \frac{dx}{dt} - c^2 \cdot t}{\sqrt{x^2 - c^2 \cdot t^2}} \tag{51}$$

$$d\left(a_{x''} \cdot \tau_{x''}\right) = -dt \cdot c^2 \cdot \frac{x - \frac{dx}{dt} \cdot t}{x^2 - c^2 \cdot t^2} \tag{52}$$

Für die Geschwindigkeitstransformations folgt hieraus

$$u''_x = a_{x''} \cdot \frac{dx''}{d\left(a_{x''} \cdot \tau_{x''}\right)} = -\frac{c^2}{x''} \cdot \frac{dx''}{d\left(a_{x''} \cdot \tau_{x''}\right)} = -\frac{c^2}{\sqrt{x^2 - c^2 \cdot t^2}} \cdot \frac{dt \cdot \frac{x \cdot \frac{dx}{dt} - c^2 \cdot t}{\sqrt{x^2 - c^2 \cdot t^2}}}{-dt \cdot c^2 \cdot \frac{x - \frac{dx}{dt} \cdot t}{x^2 - c^2 \cdot t^2}}$$

$$u''_x = \frac{u_x - \frac{c^2 \cdot t}{x}}{1 - \frac{u_x}{c^2} \cdot \frac{c^2 \cdot t}{x}} \tag{53}$$

Wir hatten für die relativ Geschwindigkeit die Gleichung
$v = c \cdot tanh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)$ schon gefunden. Aus den Gleichungen (35) und (36) folgt

$$\frac{c \cdot t}{x} = tanh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right) \qquad \text{oder} \qquad \frac{c^2 \cdot t}{x} = v \tag{54}$$

Damit folgt aus der Gleichung (53) die Einstein'sche Addition der Geschwindigkeiten

$$u''_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x \cdot v}{c^2}} \tag{55}$$

Für die y-Komponente folgt

$$u''_y = a_{x''} \cdot \frac{dy''}{d\left(a_{x''} \cdot \tau_{x''}\right)} = -\frac{c^2}{x''} \cdot \frac{dy''}{d\left(a_{x''} \cdot \tau_{x''}\right)} = -\frac{c^2}{\sqrt{x^2 - c^2 \cdot t^2}} \cdot \frac{dy}{-dt \cdot c^2 \cdot \dfrac{x - \dfrac{dx}{dt} \cdot t}{x^2 - c^2 \cdot t^2}}$$

$$u''_y = \frac{\dfrac{dy}{dt} \cdot \sqrt{x^2 - c^2 \cdot t^2}}{x - \dfrac{dx}{dt} \cdot t} = \frac{u_y \cdot \sqrt{1 - \dfrac{c^2 \cdot t^2}{x^2}}}{1 - \dfrac{u_x}{c} \cdot \dfrac{c \cdot t}{x}} \tag{56}$$

Für die z-Komponente ergibt sich symmetrisch zu y-Komponente

$$u''_z = \frac{u_z \cdot \sqrt{1 - \dfrac{c^2 \cdot t^2}{x^2}}}{1 - \dfrac{u_x}{c} \cdot \dfrac{c \cdot t}{x}} \tag{57}$$

mit Hilfe der Gleichung (54) können wir wieder mit der relativ Geschwindigkeit schreiben

$$u''_y = \frac{u_y \cdot \sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}{1 - \dfrac{u_x \cdot v}{c^2}} \tag{58}$$

$$u''_z = \frac{u_z \cdot \sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}{1 - \dfrac{u_x \cdot v}{c}} \tag{59}$$

Aus der Gleichung (53) folgt zuerst (siehe Anhang 5 Gleichung (A5G6))

$$du''_x = dt \cdot \frac{\alpha_x \cdot \left(1 - \dfrac{c^2 \cdot t^2}{x^2}\right) - \dfrac{c^2}{x} \cdot \left(1 + \dfrac{u_x \cdot t}{x}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{u_x^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \dfrac{u_x \cdot t}{x}\right)^2}$$

und mit der Gleichung(52) folgt

$$\alpha_x'' = a_{x''} \cdot \frac{du_x''}{d\left(a_{x''} \cdot \tau_{x''}\right)} = -\frac{c^2}{x''} \cdot \frac{dt \cdot \dfrac{\alpha_x \cdot \left(1 - \dfrac{c^2 \cdot t^2}{x^2}\right) - \dfrac{c^2}{x} \cdot \left(1 + \dfrac{u_x \cdot t}{x}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{u_x^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \dfrac{u_x \cdot t}{x}\right)^2}}{-dt \cdot c^2 \cdot \dfrac{x - \dfrac{dx}{dt} \cdot t}{x^2 - c^2 \cdot t^2}} \tag{60}$$

und nach einigen Umformungen bekommen wir (siehe Anhang 5 Gleichung (A5G8)

$$\alpha_x'' = \frac{\alpha_x \cdot \left(1 - \dfrac{c^2 \cdot t^2}{x^2}\right) - \dfrac{c^2}{x} \cdot \left(1 - \dfrac{u_x \cdot t}{x}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{u_x^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \dfrac{u_x \cdot t}{x}\right)^3} \cdot \sqrt{1 - \frac{c^2 \cdot t^2}{x^2}} \tag{61}$$

Drücken wir dies noch mit der Raketenbeschleunigung $a_x = \dfrac{c^2}{x}$ aus so erhalten wir

$$\alpha_{x''} = \alpha_x \cdot \frac{\left(1 - \dfrac{c^2 \cdot t^2}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1 - \dfrac{u_x \cdot t}{x}\right)^3} - a_x \cdot \frac{\left(1 - \dfrac{u_x^2}{c^2}\right) \cdot \sqrt{1 - \dfrac{c^2 \cdot t^2}{x^2}}}{\left(1 - \dfrac{u_x \cdot t}{x}\right)^2} \tag{62}$$

Mit der Relativgeschwindigkeit $\dfrac{t}{x} = \dfrac{v}{c^2}$ formuliert ergibt

$$\alpha_{x''} = \alpha_x \cdot \frac{\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1 - \dfrac{u_x \cdot v}{c^2}\right)^3} - a_x \cdot \frac{\left(1 - \dfrac{u_x^2}{c^2}\right) \cdot \sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}{\left(1 - \dfrac{u_x \cdot v}{c^2}\right)^2} \tag{63}$$

Für die y und z-Komponenten erhalten wir ganz ähnlich (siehe Anhang 5 (A5G12))

$$\alpha_y'' = \alpha_y \cdot \frac{1 - \dfrac{c^2 \cdot t^2}{x^2}}{\left(1 - \dfrac{u_x \cdot t}{x}\right)^2} + \alpha_x \cdot \frac{\dfrac{u_y \cdot t}{x} \cdot \left(1 - \dfrac{c^2 \cdot t^2}{x^2}\right)}{\left(1 - \dfrac{u_x \cdot t}{x}\right)^3} + \frac{u_y \cdot \dfrac{c^2}{x} \cdot \left(\dfrac{u_x}{c^2} - \dfrac{t}{x}\right)}{\left(1 - \dfrac{u_x \cdot t}{x}\right)^2} \tag{64}$$

oder mit der Relativgeschwindigkeit formuliert

$$\alpha_y'' = \alpha_y \cdot \frac{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \dfrac{u_x \cdot v}{c^2}\right)^2} + \alpha_x \cdot \frac{\dfrac{u_y \cdot v}{c^2} \cdot \left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \dfrac{u_x \cdot v}{c^2}\right)^3} + \frac{u_y \cdot \dfrac{c^2}{x} \cdot \left(\dfrac{u_x}{c^2} - \dfrac{v}{c^2}\right)}{\left(1 - \dfrac{u_x \cdot v}{c^2}\right)^2} \tag{65}$$

$$\alpha_z'' = \alpha_z \cdot \frac{1 - \dfrac{c^2 \cdot t^2}{x^2}}{\left(1 - \dfrac{u_x \cdot t}{x}\right)^2} + \alpha_x \cdot \frac{\dfrac{u_z \cdot t}{x} \cdot \left(1 - \dfrac{c^2 \cdot t^2}{x^2}\right)}{\left(1 - \dfrac{u_x \cdot t}{x}\right)^3} + \frac{u_z \cdot \dfrac{c^2}{x} \cdot \left(\dfrac{u_x}{c^2} - \dfrac{t}{x}\right)}{\left(1 - \dfrac{u_x \cdot t}{x}\right)^2} \tag{66}$$

1.3.9 Anwendung der Transformationsgleichungen

Beispiel 1:
Wir betrachten eine Probemasse m, die sich zum Zeitpunkt $t = 0$ an der Koordinate $x(t) = x_0 = x''_0$ befindet. In S soll sich m nicht bewegen. Es sei also $u_x = 0$ und $\alpha_x = 0$ Dann folgt aus der Transformation

$$x = x'' \cdot cosh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)$$

$$x'' = \frac{x''_0}{cosh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)} \tag{67}$$

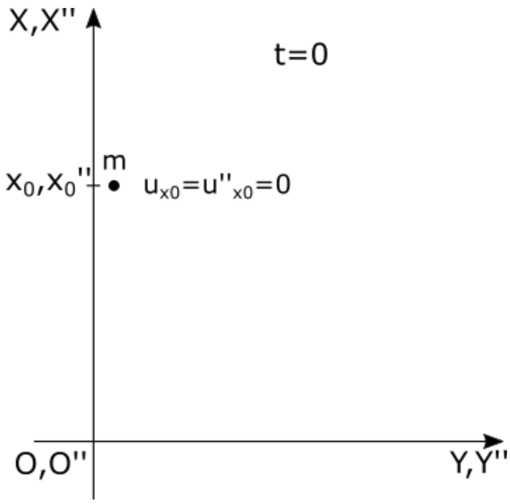


Abbildung 13

Beispiel 2:
Wir betrachten eine Probemasse m, für die in S gelten soll $x(t) = u_{x0} \cdot t + x_0$ mit $0 < u_{x0}$ Es sei also $\alpha_x = 0$. Dann folgt für $t = 0$ zuerst $x_0 = x''_0$ und $u_{x0} = u''_{x0}$. Damit wird

aus $\quad x = x'' \cdot cosh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)$

$$u''_{x0} \cdot t + x''_0 = x'' \cdot cosh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)$$

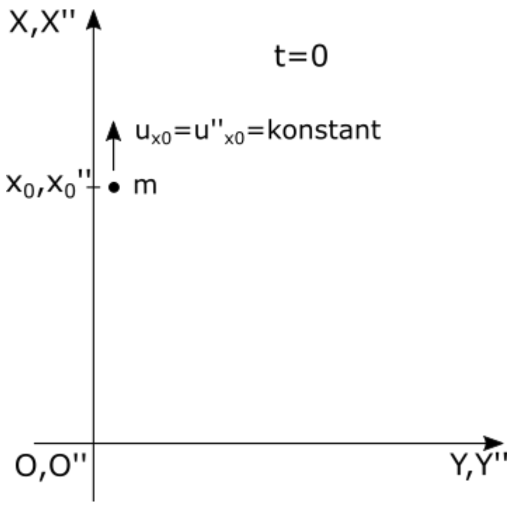


Abbildung 14

setzen wir noch $\quad t = \frac{x''}{c} \cdot sinh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right) \quad$ ein und lösen nach x” auf

so erhalten wir $\quad x'' = \dfrac{x''_0}{cosh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right) - \frac{u''_{x0}}{c} \cdot sinh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)} \qquad (68)$

Beispiel 3:
Jetzt betrachten wir eine Probemasse m, die zum Zeitpunkt $t = 0$ sich in S an der Koordinate x_0 befindet, und eine konstante Geschwindigkeit u_{y0} entlang der positiven Y-Achse hat. Es gilt also $x(t) = x_0$ und $y(t) = u_{y0} \cdot t$ mit $0 < u_{y0}$. Dann folgt zuerst für x'' wie oben

$$x'' = \frac{x''_0}{cosh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)}$$

und dann mit $y(t) = y''$ und $u_{y0} = u''_{y0}$

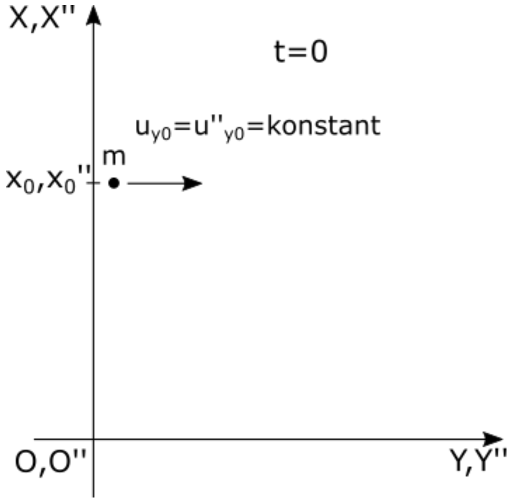


Abbildung 15

erhalten wir $$y'' = u''_{y0} \cdot \frac{x''}{c} \cdot sinh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right) = u''_{y0} \cdot \frac{x''_0}{c} \cdot tanh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right) \tag{69}$$

Beispiel 4:
Ein Lichtstrahl wird zum Zeitpunkt $t = 0$ von der Koordinate $x(t) = x_0$, $y = 0$ in S, in Richtung der positiven Y-Achse ausgesandt. Dann gilt in S $x(t) = x_0$ und $y(t) = c \cdot t$. Dann folgt zuerst für x'' wieder wie oben

$$x'' = \frac{x''_0}{cosh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)}$$

$$y(t) = y'' = c \cdot \frac{x''}{c} \cdot sinh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)$$

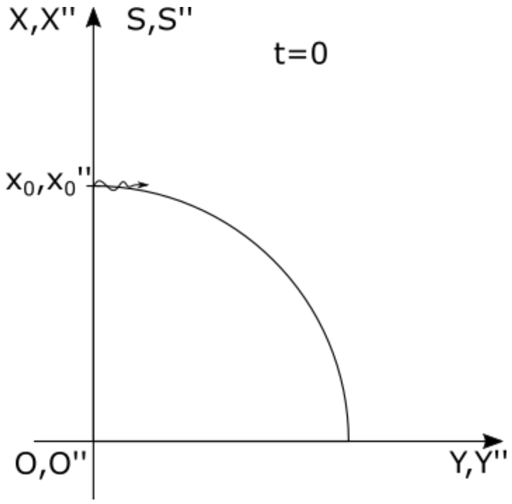


Abbildung 16

$$y'' = \frac{x''_0}{cosh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)} \cdot sinh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right) = x''_0 \cdot tanh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)$$

hierraus folgt wiederum $$x''^2 + y''^2 = x''^2_0 \tag{70}$$

Das Licht bewegt sich also auf einer Kreisbahn um den Ursprung, wobei x''_0 der Radius der Kreisbahn ist.

Beispiel 5:
Jetzt wollen wir den Lichtstrahl zum Zeitpunkt $t = 0$ von dem Punkt mit den Koordinaten $x(t) = x_0$, $y = 0$ in S, unter dem Winkel α zu der positiven Y-Achse aussenden. Dann gilt in S:

$$x_L(t) = c \cdot t \cdot sin(\alpha_0) + x_0 \tag{71}$$

$$y_L(t) = c \cdot t \cdot cos(\alpha_0) \tag{72}$$

Setzen wir Gleichung (71) mit der Gleichung (35) gleich so erhalten wir

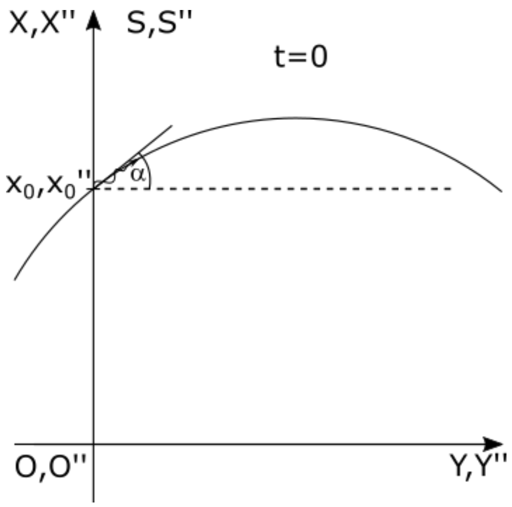


Abbildung 17

$$c \cdot t \cdot sin(\alpha_0) + x_0 = x_L'' \cdot cosh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)$$

oder $\quad c \cdot t \cdot sin(\alpha_0'') + x_0'' = x_L'' \cdot cosh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)$

setzen wir Gleichung (36) ein.

$$x_L'' \cdot cosh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right) \cdot sin(\alpha_0'') + x_0'' = x_L'' \cdot sinh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)$$

ergibt $\quad x_L'' = \dfrac{x_0''}{cosh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right) - sinh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right) \cdot sin(\alpha_0'')} \qquad (73)$

für y'' erhalten wir aus Gleichung (36)

$$y_L = c \cdot t \cdot cos(\alpha_0) = x_L'' \cdot sinh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right) \cdot cos(\alpha_0'') = y_L''$$

$$y_L'' = x_L'' \cdot sinh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right) \cdot cos(\alpha_0'') \tag{74}$$

Aus den Gleichungen (73) und (73) erhalten wir dann durch bisschen umformen

$$x_L''^2 + \left(y_L'' - x_0'' \cdot tan\left(\alpha_0''\right)\right)^2 = \left(\frac{x_0''}{cos\left(\alpha_0''\right)}\right)^2 \tag{75}$$

Gleichung (75) beschreibt eine Kreisbahn um den Punkt $(x'' = 0\ ,\ y'' = x_0'' \cdot tan\left(\alpha_0''\right))$ mit dem Radius $R = \dfrac{x_0''}{cos\left(\alpha_0''\right)}$.
Für $\alpha_0'' = 0$ erhalten wir die Lösung aus Beispiel 4. Aber auch für $\alpha_0'' = \pm\pi$ könnten wir von einem Kreis sprechen allerdings mit dem Radius $R = \infty$. So können wir also insgesamt sagen, dass das Licht sich in S'' stets auf Kreisbahnen bewegt.

Wie man sieht kann man mit Hilfe der Transformationsgleichungen die Lösung von Kinematik Aufgaben in S'' bestimmen, wenn die Lösungen in S schon bekannt sind. Es ist aber auch nötig die Lösungen in S'' aus den wirkenden Beschleunigungen direkt zu berechnen. Sehen wir uns dazu die Beschleunigungstransformation nach Gleichung (63) an.

$$\alpha_{x''} = \alpha_x \cdot \frac{\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1 - \dfrac{u_x \cdot v}{c^2}\right)^3} - a_x \cdot \frac{\left(1 - \dfrac{u_x^2}{c^2}\right) \cdot \sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}{\left(1 - \dfrac{u_x \cdot v}{c^2}\right)^2}$$

sei $\alpha_x = 0$ dann gilt zum Zeitpunkt $t = 0$ einerseits $v = 0$ andererseits $u_x = u_x''$ sowie $x\left(t = 0\right) = x_0 = x_0'' = x''\left(\tau_{x''} = 0\right)$ und damit auch $a_x = \dfrac{c^2}{x} = \dfrac{c^2}{x''} = -a_x''$

$$\text{also} \quad \alpha_{x''} = a_{x''} \cdot \left(1 - \frac{u_x''^2}{c^2}\right) \tag{76}$$

Gleichung (76) gibt also an, wie hoch die Beschleunigung einer Probemasse m an der Koordinate x'' ist, wenn sie in S'' eine Geschwindigkeit u_x'' hat.

Beispiel 6:
Gegeben sei die Situation nach Aufgabe 1. Es soll die Lösung berechnet werden ohne die Transformationsgleichungen zu benutzen. Wir gehen von Gleichung (76) aus.

$$\alpha_{x''} = a_{x''} \cdot \frac{du_x''}{d\left(a_{x''} \cdot \tau_{x''}\right)} = a_{x''} \cdot \frac{dx''}{d\left(a_{x''} \cdot \tau_{x''}\right)} \cdot \frac{du_x''}{dx''} = u_x'' \cdot \frac{du_x''}{dx''} = a_{x''} \cdot \left(1 - \frac{u_x''^2}{c^2}\right)$$

$$\text{oder} \quad \frac{u_x''}{1 - \dfrac{u_x''^2}{c^2}} \cdot du_x'' = -\frac{c^2}{x''} \cdot dx'' \quad \text{als Integral} \quad \int_0^{u_{x''}} \frac{u_x''}{1 - \dfrac{u_x''^2}{c^2}}\, du_x'' = \int_{x_0''}^{x''} -\frac{c^2}{x''}\, dx''$$

$$-\frac{c^2}{2}\cdot ln\left(1-\frac{u_x''^2}{c^2}\right)=-c^2\cdot ln\left(\frac{x''}{x_0''}\right)\qquad \text{ergibt}\qquad u_x''=-c\cdot\sqrt{1-\left(\frac{x''}{x_0''}\right)^2} \tag{77}$$

$$u_x''=a_{x''}\cdot\frac{dx''}{d\left(a_{x''}\cdot\tau_{x''}\right)}=-c\cdot\sqrt{1-\left(\frac{x''}{x_0''}\right)^2}$$

$$-\frac{c^2}{x''}\cdot\frac{dx''}{\sqrt{1-\left(\frac{x''}{x_0''}\right)^2}}=-c\cdot d\left(a_{x''}\cdot\tau_{x''}\right)\quad \text{oder}\quad \frac{dx''}{x''\cdot\sqrt{1-\left(\frac{x''}{x_0''}\right)^2}}=d\left(\frac{a_{x''}\cdot\tau_{x''}}{c}\right)$$

$$\int_{x_0''}^{x''}\frac{1}{x''\cdot\sqrt{1-\left(\frac{x''}{x_0''}\right)^2}}\,dx''=\int_0^{\frac{a_{x''}\cdot\tau_{x''}}{c}}d\left(\frac{a_{x''}\cdot\tau_{x''}}{c}\right)=\left(\frac{a_{x''}\cdot\tau_{x''}}{c}\right)$$

Subsitution: $x''=x_0''\cdot cos\left(\xi\right)$ damit auch $dx''=-x_0''\cdot sin\left(\xi\right)\cdot d\xi$

$$\int_0^{\xi}\frac{-x_0''\cdot sin\left(\xi\right)}{x_0''\cdot cos\left(\xi\right)\cdot\sqrt{1-\left(cos\left(\xi\right)\right)^2}}\,d\xi=\left(\frac{a_{x''}\cdot\tau_{x''}}{c}\right)$$

$$\int_0^{\xi}\frac{1}{cos\left(\xi\right)}\,d\xi=\left(-\frac{a_{x''}\cdot\tau_{x''}}{c}\right)$$

ergibt aussgewertet mit der Rücksubsitution $x''=\dfrac{x_0''}{cos\left(-\dfrac{a_{x''}\cdot\tau_{x''}}{c}\right)}$

Gehen wir von der Gleichung (65) aus.

$$\alpha_y''=\alpha_y\cdot\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\left(1-\frac{u_x\cdot v}{c^2}\right)^2}+\alpha_x\cdot\frac{\frac{u_y\cdot v}{c^2}\cdot\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{u_x\cdot v}{c^2}\right)^3}+\frac{u_y\cdot\frac{c^2}{x}\cdot\left(\frac{u_x}{c^2}-\frac{v}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{u_x\cdot v}{c^2}\right)^2}$$

Wir betrachten Gleichung (65) zum Zeitpunkt $t = 0$. Da $v = 0$ ist vereinfacht sich (65) zu

$$\alpha''_y = \alpha_y + u_y \cdot \frac{c^2}{x} \cdot \frac{u_x}{c^2}$$

Setzen wir $\alpha = 0$ und berücksichtigen dass zum Zeitpunkt $t = 0$ auch $u''_x = u_x$ und $u''_y = u_y$ gilt so folgt

$$\alpha''_y = \frac{u''_x \cdot u''_y}{x''} \qquad \text{oder} \qquad \alpha''_y = -a''_x \cdot \frac{u''_x \cdot u''_y}{c^2} \qquad \text{mit} \qquad a''_x = -\frac{c^2}{x''} \tag{78}$$

Beispiel 7:

Betrachten wir eine Probemasse m, die sich zum Zeitpunkt $\tau = 0$ an der Koordinate $x''(\tau) = x''_0$ befindet. Die Probemasse m soll entlang der positiven Y"-Achse die Anfangsgeschwindigkeit u''_{y0} haben. In Beispiel 1 hatten wir für die x'' Koordinate die folgende Lösung gefunden.

$$x'' = \frac{x''_0}{cosh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)}$$

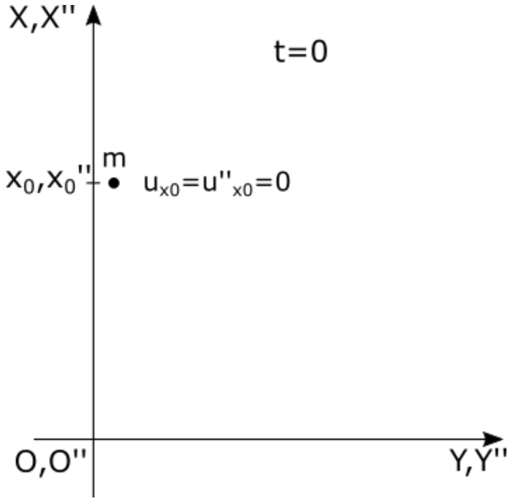


Abbildung 18

In Beispiel 6 hatten wir für u''_x die Gleichung (79) gefunden.

$$u''_x = -c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x''}{x''_0}\right)^2} = -c \cdot tanh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)$$

Setzen wir dies oben ein so folgt

$$\alpha''_y = \frac{-\, c \cdot tanh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right) \cdot u''_y}{x''}$$

$$\alpha''_y = a''_x \cdot \frac{du''_y}{d\left(a''_x \cdot \tau_{x''}\right)} = -\frac{c^2}{x''} \cdot \frac{du''_y}{d\left(a''_x \cdot \tau_{x''}\right)} = \frac{-\, c \cdot tanh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right) \cdot u''_y}{x''}$$

$$\frac{du''_y}{u''_y} = tanh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right) \cdot d\left(\frac{a''_x \cdot \tau_{x''}}{c}\right) = -tanh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right) \cdot d\left(-\frac{a''_x \cdot \tau_{x''}}{c}\right)$$

$$\int_{u''_{y0}}^{u''_y} \frac{1}{u''_y}\, du''_y = \int_0^{-\frac{a''_x \cdot \tau_{x''}}{c}} -tanh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)\; d\left(-\frac{a''_x \cdot \tau_{x''}}{c}\right)$$

$$ln\left(\frac{u''_y}{u''_{y0}}\right) = -ln\left(cosh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)\right) \quad \textbf{ergibt} \quad u''_y = \frac{u''_{y0}}{cosh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)} \tag{79}$$

$$u''_y = a''_x \cdot \frac{dy''}{d\left(a''_x \cdot \tau_{x''}\right)} = -\frac{c^2}{x''} \cdot \frac{dy''}{d\left(a''_x \cdot \tau_{x''}\right)} = \frac{u''_{y0}}{cosh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)}$$

$$dy'' = \frac{u''_{y0} \cdot x''_0}{c} \cdot \frac{d\left(-\frac{a''_x \cdot \tau_{x''}}{c}\right)}{cosh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)^2} \quad , \quad \int_0^{y''} dy'' = \frac{u''_{y0} \cdot x''_0}{c} \int_0 \frac{d\left(-\frac{a''_x \cdot \tau_{x''}}{c}\right)}{cosh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)^2}$$

$$\text{ergibt} \quad y'' = \frac{u''_{y0} \cdot x''_0}{c} \cdot tanh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right) \tag{80}$$

Aus x'' und y'' folgt

$$x''^2 + y''^2 = \frac{x''^2_0}{cosh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)^2} + \frac{{u''_{y0}}^2 \cdot x''^2_0}{c^2} \cdot tanh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)^2$$

$$x''^2 + y''^2 = {x''_0}^2 \cdot \frac{1 + \frac{{u''_{y0}}^2}{c^2} \cdot sinh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)^2}{cosh\left(-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)^2}$$

für $u''_{y0} = c$ folgt wie im Beispiel 4 $\quad x''^2 + y''^2 = x''^2_0$

1.3.10 Lichtablenkung

Im Beispiel 4 hatten wir die Gleichung $\quad x''^2 + y''^2 = x_0''^2 \quad$ gefunden. Schreiben wir dies anders $\quad x'' = \sqrt{x_0''^2 - y''^2} \quad$ differenzieren einmal

$$\frac{dx''}{dy''} = \frac{-2 \cdot y''}{2 \cdot \sqrt{x_0''^2 - y''^2}} = -\frac{y''}{x_0''} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{y''^2}{x_0''^2}}} \approx -\frac{y''}{x_0''} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{y''^2}{x_0''^2}\right) \quad \text{für} \quad y'' << x_0''$$

$$\frac{dx''}{dy''} = tan\,(\alpha'') \approx -\frac{y''}{x_0''} \quad \text{für} \quad \alpha'' << 1 \quad tan\,(\alpha'') \approx \alpha'' \approx -\frac{y''}{x_0''} = -\frac{c \cdot \Delta\tau_{x_0''}}{x_0''} = \frac{a_x'' \cdot \Delta\tau_{x_0''}}{c}$$

$$\text{ergibt} \quad \alpha'' \approx \frac{a_x'' \cdot \Delta\tau_{x_0''}}{c} \tag{81}$$

1.3.11 Das Translationsfeld

Bisher habe ich ausgehend vom Raketenflugproblem das geradlinig gleichförmig beschleunigte Bezugssystem S'' eingeführt. Dabei hat sich herausgestellt das vom natürlichen Ruhesystem S' ausgesehen S'' eine Beschleunigungsstruktur nach der Gleichung (7) also $a'(x') = \frac{c^2}{x'}$ aufweist. Da nach Satz 7 aber $x'' = x'$ gilt, ist die Gleichung

$$a''(x'') = -\frac{c^2}{x''} \tag{82}$$

in S'' uneingeschränkt gültig. Das Minuszeichen kommt daher weil in S'' die Beschleunigung in die entgegengesetzte Richtung zeigt. Mit der Singularität an der Koordinate $x'' = 0$ kann man in S'' von der Existenz eines Kraftfeldes sprechen. Siehe Abbildung 19 Dieses relativistische Kraftfeld spielt wie wir noch sehen werden für das Gravitationsfeld eine entscheidende Rolle und kann zurecht als Mutter der Gravitation angesehen werden. Daher ist die folgende Definition unumgänglich.

Definition 4 (Translationsfeld) *Das relativistische Kraftfeld welches für Geradlinig Gleichmäßig Beschleunigte Bezugssysteme eine Realität besitzt und durch eine angepasste Wahl des Koordinatenursprungs die mathematische Form* $a''(x'') = -\frac{c^2}{x''}$ *erhält bezeichne ich Translationsfeld.*

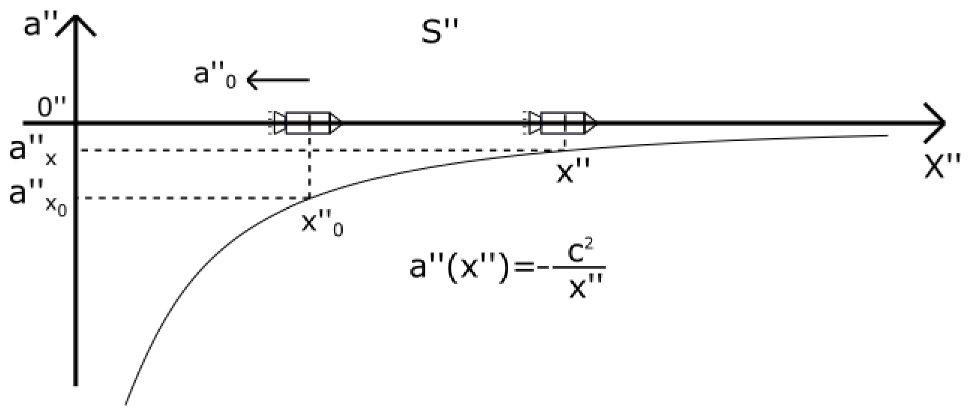


Abbildung 19: Translationsfeld

Diese Definition gestattet uns das einsteinsche Äquivalenzprinzip prägnant als Satz zu formulieren.

Satz 12 (Das Äquivalenzprinzip) *Das Translationsfeld und das Gravitationsfeld sind lokal ununterscheidbar.*

Auf Unterscheidungen wie träge Masse, schwere Masse gehe ich gar nicht ein da die Erschließung des Translationsfeldes zu einer neuen Behandlung des Äquivalenzprinzips führt. Satz 12 wurde bis jetzt experimentell bewiesen, aber die Einführung des Translationsfeldes wird einen theoretischen Beweis gestatten. Denn auf die Frage warum das Translationsfeld und das Gravitationsfeld lokal ununterscheidbar sein sollen kann es nur eine vernünftige Antwort geben. Verwandtschaft. Das heißt das eine Feld lässt sich aus dem anderen Feld herleiten. Der nächste Satz beinhaltet die Idee, nicht nur Satz 12 zu beweisen sondern das Äquivalenzprinzip komplett aufzulösen.

Satz 13 (Auflösung des Äquivalenzprinzip) *Das Translationsfeld geht unter bestimmten Bedingungen in das Gravitationsfeld über.*

Die Formulierung nach Satz 13 ist vorläufig. Der Beweis sowie die Erschließung der „bestimmten Bedingungen" ist der Gegenstand der nächsten Arbeit mit dem Titel „Expandierende und Kollabierende Räume". Um es kurz vorweg zu nehmen, das Konzept der expandierenden und kollabierenden Räume wird nicht nur das Gravitationsfeld aus dem Translationsfeld extrahieren sondern auch eine fünfte Wechselwirkung die mit der Gravitation im engen Zusammenhang steht und vermutlich das fehlende Bindeglied zwischen Gravitation und Quantentheorie darstellt. Der Abschnitt „Zeitantrieb" ist auch ein Fingerzeig auf diese fünfte Wechselwirkung.

1.3.12 Zeitmessung Allgemein

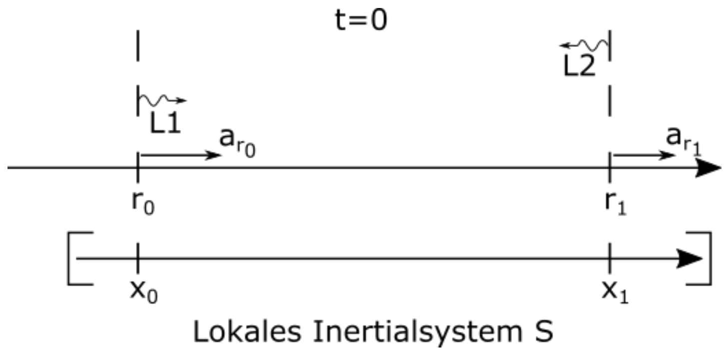


Abbildung 20: lokale Zeitmessung

In diesem Abschnitt möchte ich ausgehend von der Zeitmessung in geradlinig gleichförmig beschleunigten Bezugssystemen die Zeitmessung verallgemeinern. Dazu sei ein Beschleunigtes Bezugssystem mit gleichen statischen Eigenschaften wie das Translationsfeld vorgegeben. Die Beschleunigungsverteilung $a(r)$ sei unbekannt. Die Koordinaten r_0 und r_1 seien hinreichend nah beieinander. Von einem lokalen Inertialsystem S aus sollen die Beobachtungen durchgeführt werden. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sollen zwei Lichtstrahlen L_0 und L_1 die Koordinaten r_0 und r_1 verlassen.
L_0 soll zum Zeitpunkt $t = 0$ die Koordinate r_0 verlassen und zum Zeitpunkt $t = t_{01}$ die Koordinate r_1 erreichen und von dort reflektiert zum Zeitpunkt $t = t_{02}$ wieder an der Koordinate r_0 ankommen. Wir finden für t_{01} und t_{02} die folgenden Ausdrücke. siehe Anhang 6

$$t_{01} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{a_{x_1}} \cdot \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{a_{x_1} \cdot \Delta x}{c^2}\right)} - \left(1 - \frac{a_{x_1} \cdot \Delta x}{c^2}\right) \right) \tag{83}$$

$$t_{02}=\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{a_{x_0}}\cdot\left(\frac{1+\frac{a_{x_0}}{a_{x_1}}\cdot\left(\frac{1}{\left(1-\frac{a_{x_1}\cdot\Delta x}{c^2}\right)}-\left(1-\frac{a_{x_1}\cdot\Delta x}{c^2}\right)\right)}{1}-\frac{1}{1+\frac{a_{x_0}}{a_{x_1}}\cdot\left(\frac{1}{\left(1-\frac{a_{x_1}\cdot\Delta x}{c^2}\right)}-\left(1-\frac{a_{x_1}\cdot\Delta x}{c^2}\right)\right)}\right) \tag{84}$$

L_1 soll zum Zeitpunkt $t = 0$ die Koordinate r_1 verlassen und zum Zeitpunkt $t = t_{11}$ die Koordinate r_0 erreichen und von dort reflektiert zum Zeitpunkt $t = t_{12}$ wieder an der

Koordinate r_1 ankommen. Wir finden für t_{11} und t_{12} die folgenden Ausdrücke

$$t_{11} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{a_{x_0}} \cdot \left(\left(1 + \frac{a_{x_0} \cdot \Delta x}{c^2}\right) - \frac{1}{\left(1 + \frac{a_{x_0} \cdot \Delta x}{c^2}\right)} \right) \tag{85}$$

$$t_{12}=\frac{1}{2} \cdot \frac{c}{a_{x_1}} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{a_{x_1}}{a_{x_0}} \cdot \left(\left(1+\frac{a_{x_0} \cdot \Delta x}{c^2}\right) - \frac{1}{\left(1+\frac{a_{x_0} \cdot \Delta x}{c^2}\right)} \right)} - \frac{1 - \frac{a_{x_1}}{a_{x_0}} \cdot \left(\left(1+\frac{a_{x_0} \cdot \Delta x}{c^2}\right) - \frac{1}{\left(1+\frac{a_{x_0} \cdot \Delta x}{c^2}\right)} \right)}{1} \right) \tag{86}$$

Für die Uhr an der Koordinate r_0 gilt von S ausgesehen

$$t = \frac{c}{a_{x_0}} \cdot sinh\left(\frac{a_{x_0} \cdot \Delta\tau_{x_0}}{c}\right) = \frac{c}{a_{x_0}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{a_{x_0} \cdot \Delta\tau_{x_0}}{c}} - e^{-\frac{a_{x_0} \cdot \Delta\tau_{x_0}}{c}}\right) \tag{87}$$

gleichgesetzt mit t_{02} ergibt:

$$e^{\frac{a_{x_0} \cdot \Delta\tau_{x_0}}{c}} = 1 + \frac{a_{x_0}}{a_{x_1}} \cdot \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{a_{x_1} \cdot \Delta x}{c^2}\right)} - \left(1 - \frac{a_{x_1} \cdot \Delta x}{c^2}\right) \right)$$

$$\Delta\tau_{x_0} = \frac{c}{a_{x_0}} \cdot ln\left(1 + \frac{a_{x_0}}{a_{x_1}} \cdot \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{a_{x_1} \cdot \Delta x}{c^2}\right)} - \left(1 - \frac{a_{x_1} \cdot \Delta x}{c^2}\right) \right)\right) \tag{88}$$

Für die Uhr an der Koordinate r_1 gilt von S ausgesehen

$$t = \frac{c}{a_{x_1}} \cdot sinh\left(\frac{a_{x_1} \cdot \Delta\tau_{x_1}}{c}\right) = \frac{c}{a_{x_1}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{a_{x_1} \cdot \Delta\tau_{x_1}}{c}} - e^{-\frac{a_{x_1} \cdot \Delta\tau_{x_1}}{c}}\right) \tag{89}$$

gleichgesetzt mit t_{12} ergibt:

$$e^{\frac{a_{x_1} \cdot \Delta\tau_{x_1}}{c}} = \frac{1}{1 - \frac{a_{x_1}}{a_{x_0}} \cdot \left(\left(1 + \frac{a_{x_0} \cdot \Delta x}{c^2}\right) - \frac{1}{\left(1+\frac{a_{x_0} \cdot \Delta x}{c^2}\right)} \right)}$$

entsprechend erhalten wir dann für die Uhr an der Koordinate r_1 die Zeit $\Delta\tau_{x_1}$

$$\Delta\tau_{x_1} = \frac{c}{a_{x_1}} \cdot ln\left(\frac{1}{1 - \frac{a_{x_1}}{a_{x_0}} \cdot \left(\left(1 + \frac{a_{x_0} \cdot \Delta x}{c^2}\right) - \frac{1}{\left(1+\frac{a_{x_0} \cdot \Delta x}{c^2}\right)} \right)} \right)$$

oder $\quad \Delta\tau_{x_1} = -\frac{c}{a_{x_1}} \cdot ln\left(1 - \frac{a_{x_1}}{a_{x_0}} \cdot \left(\left(1 + \frac{a_{x_0} \cdot \Delta x}{c^2}\right) - \frac{1}{\left(1 + \frac{a_{x_0} \cdot \Delta x}{c^2}\right)}\right)\right) \qquad (90)$

Für das Translationsfeld hatten wir die Beziehungen

$a_{x_1} = \frac{a_{x_0}}{1 + \frac{a_{x_0} \cdot \Delta x}{c^2}}$ oder $a_{x_0} = \frac{a_{x_1}}{1 - \frac{a_{x_1} \cdot \Delta x}{c^2}}$ gefunden.

setzen wir dies in die Beziehungen für $\Delta\tau_{x_1}$ und $\Delta\tau_{x_1}$ ein so ergibt sich

$$\Delta\tau_{x_0} = \frac{c}{a_{x_0}} \cdot ln\left(1 + \frac{a_{x_0}}{a_{x_1}} \cdot \left(\frac{a_{x_0}}{a_{x_1}} - \frac{a_{x_1}}{a_{x_0}}\right)\right) = \frac{c}{a_{x_0}} \cdot ln\left(\frac{{a_{x_0}}^2}{{a_{x_1}}^2}\right)$$

$$\Delta\tau_{x_1} = -\frac{c}{a_{x_1}} \cdot ln\left(1 - \frac{a_{x_1}}{a_{x_0}} \cdot \left(\frac{a_{x_0}}{a_{x_1}} - \frac{a_{x_1}}{a_{x_0}}\right)\right) = \frac{c}{a_{x_1}} \cdot ln\left(\frac{{a_{x_0}}^2}{{a_{x_1}}^2}\right)$$

woraus dann $a_{x_0} \cdot \Delta\tau_{x_0} = a_{x_1} \cdot \Delta\tau_{x_1}$ uneingeschränkt folgt.
Ich möchte die Gleichungen (88) und (90) annähern um für Beschleunigungsfelder eine Lösung zu finden die nicht global exakt lösbar sind. So folgen aus den Gleichungen (88) und (90) wenn wir sie bis auf die Größen zweiter Ordnung annähern (siehe Anhang 7)

$$\Delta\tau_{x_0} = 2 \cdot \frac{\Delta x}{c} \cdot \left(1 - \frac{a_{x_1} \cdot \Delta x}{2 \cdot c^2}\right) \tag{91}$$

$$\Delta\tau_{x_1} = 2 \cdot \frac{\Delta x}{c} \cdot \left(1 + \frac{a_{x_0} \cdot \Delta x}{2 \cdot c^2}\right) \tag{92}$$

und hieraus folgt dann wenn wir Δr anstatt Δx schreiben

$$\Delta\tau_{r_0} \cdot \left(1 + \frac{a_{r_0} \cdot \Delta r}{2 \cdot c^2}\right) = \Delta\tau_{r_1} \cdot \left(1 - \frac{a_{r_1} \cdot \Delta r}{2 \cdot c^2}\right) \tag{93}$$

Wir sehen es gilt: $\Delta\tau_{r_0} < \Delta\tau_{r_1}$. Die Zeit vergeht an der Koordinate r_0 langsamer als an der Koordinate r_1 .

$$\Delta\tau_{r_0} + \frac{a_{r_0} \cdot \Delta r}{2 \cdot c^2} \cdot \Delta\tau_{r_0} = \Delta\tau_{r_1} - \frac{a_{r_1} \cdot \Delta r}{2 \cdot c^2} \cdot \Delta\tau_{r_1}$$

$$\frac{\Delta\tau_{r_1} - \Delta\tau_{r_0}}{\Delta r} = \frac{a_{r_1} \cdot \Delta\tau_{r_1} + a_{r_0} \cdot \Delta\tau_{r_0}}{2 \cdot c^2}$$

$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta\tau_{r_1} - \Delta\tau_{r_0}}{\Delta r} = \frac{d\tau_r}{dr} = \frac{a_r \cdot \Delta\tau_r}{c^2} \quad \text{oder} \quad a_r = c^2 \cdot \frac{1}{\Delta\tau_r} \cdot \frac{d\tau_r}{dr}$$

Diese Gleichung besagt folgendes. Vergeht an der Koordinate r die Zeit $\Delta\tau_r$ dann vergeht an der Koordinate $r + dr$ die Zeit $\Delta\tau_r + d\tau_r$. $a(r)$ ist hier die Beschleunigung der Koordinate r von dem frei fallenden lokalen Inertialsystem ausgesehen. Wollen wir das Feld betrachten so müssen wir $-a(r)$ setzen. Dann erhalten wir

$$a(r) = -c^2 \cdot \frac{1}{\Delta\tau_r} \cdot \frac{d\tau_r}{dr} \tag{94}$$

Ist nun $a_r = a(r)$ für ein spezielles Trägheitsfeld ähnlich dem Translationsfeld bekannt so kann Gleichung (94) integriert werden.

Beispiel 1: Sei $a(r) = -\dfrac{k}{r^2}$

$$-\frac{k}{r^2} = -c^2 \cdot \frac{1}{\Delta\tau_r} \cdot \frac{d\tau_r}{dr} \qquad \text{oder} \qquad \int_{\Delta\tau_{r_0}}^{\Delta\tau_r} \frac{d\tau_r}{\Delta\tau_r} = \frac{k}{c^2} \cdot \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2}$$

$$ln\left(\frac{\Delta\tau_r}{\Delta\tau_{r_0}}\right) = \frac{k}{c^2} \cdot \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) \qquad \text{oder} \quad \Delta\tau_r = \Delta\tau_{r_0} \cdot e^{\frac{k}{c^2} \cdot \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)} \tag{95}$$

Wenn die Uhren an den Koordinaten r_0 und r synchronisierbar sein sollten dann können wir die letzte Gleichung auch als Transformationsgleichung formulieren.

$$\tau_r = \tau_{r_0} \cdot e^{\frac{k}{c^2} \cdot \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)} \tag{96}$$

Hieraus folgt für das invariante Element

$$\tau_{r_0} \cdot e^{\frac{k}{c^2} \cdot \frac{1}{r_0}} = \tau_r \cdot e^{\frac{k}{c^2} \cdot \frac{1}{r}} \tag{97}$$

Beispiel 2 : Sei $a(r) = -k \cdot r$

$$-k \cdot r = -c^2 \cdot \frac{1}{\Delta\tau_r} \cdot \frac{d\tau_r}{dr} \qquad \text{oder} \qquad \int_{\Delta\tau_{r_0}}^{\Delta\tau_r} \frac{d\tau_r}{\Delta\tau_r} = \frac{k}{c^2} \cdot \int_{r_0}^{r} r \cdot dr$$

$$ln\left(\frac{\Delta\tau_r}{\Delta\tau_{r_0}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{c^2} \cdot \left(r^2 - r_0^2\right) \qquad \text{oder} \quad \Delta\tau_r = \Delta\tau_{r_0} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot \frac{k}{c^2} \cdot \left(r^2 - r_0^2\right)}$$

Wenn die Uhren an den Koordinaten r_0 und r synchronisierbar sein sollten dann können wir die letzte Gleichung auch als Transformationsgleichung formulieren.

$$\tau_r = \tau_{r_0} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot \frac{k}{c^2} \cdot \left(r^2 - r_0^2\right)} \tag{98}$$

Hieraus folgt für das invariante Element

$$\frac{\tau_{r_0}}{e^{\frac{1}{2} \cdot \frac{k}{c^2} \cdot r_0^2}} = \frac{\tau_r}{e^{\frac{1}{2} \cdot \frac{k}{c^2} \cdot r^2}} \tag{99}$$

1.4 Der Zeitantrieb

Wir gehen von der Gleichung (15) $a_0 \cdot \Delta\tau_0 = a_x \cdot \Delta\tau_x$ aus. Formulieren wir sie für S'' so erhalten wir $a_0'' \cdot \Delta\tau_0 = a_x'' \cdot \Delta\tau_x$. Wobei $a_0'' < 0$ und $a_x'' < 0$ in Richtung der negativen X-Achse zeigen. Aus der Gleichung (1) folgt

$$a_x'' = \frac{a_0''}{1 - \dfrac{a_0'' \cdot \Delta x''}{c^2}} \qquad \text{mit} \qquad \Delta x'' = x'' - x_0'' \qquad \text{und} \qquad a_0 = -a_0'' \tag{100}$$

Wir rücken x'' immer näher an x_0'' so das ich dx'' anstatt $\Delta x''$ schreibe. Ferner mache ich die Näherung $\dfrac{1}{1 - \dfrac{a_0'' \cdot dx''}{c^2}} \approx 1 + \dfrac{a_0'' \cdot dx''}{c^2}$ und damit $a_x'' = a_0'' \cdot \left(1 + \dfrac{a_0'' \cdot dx''}{c^2}\right)$.

Setzen wir dies oben ein so folgt $a_0'' \cdot \Delta\tau_0 = a_0'' \cdot \left(1 + \dfrac{a_0'' \cdot dx''}{c^2}\right) \cdot \Delta\tau_x$

oder $\Delta\tau_0 = \Delta\tau_x + \dfrac{a_0'' \cdot dx''}{c^2} \cdot \Delta\tau_x$ oder $\Delta\tau_x - \Delta\tau_0 = d\tau_0 = -\dfrac{a_0'' \cdot dx''}{c^2} \cdot \Delta\tau_x$

$$\text{ergibt} \qquad a_0'' = -c^2 \cdot \frac{1}{\Delta\tau_x} \cdot \frac{d\tau_0}{dx''} \tag{101}$$

Da $\Delta\tau_0$ beliebig gewählt werden kann, machen wir $\Delta\tau_0$ klein genug so dass der Unterschied zu $\Delta\tau_x$ vernachlässigt werden kann. Dann können wir auch schreiben

$$a_0'' = -c^2 \cdot \frac{1}{\Delta\tau_0} \cdot \frac{d\tau_0}{dx''} \tag{102}$$

In der Gleichung (102) kommen nur lokale Größen vor. Die Beschleunigung a_0'' ist dabei abhängig von der Ortsableitung der Zeit $\dfrac{d\tau_0}{dx''}$ in der Umgebung der Koordinate x_0''. Verschwindet die Ortsableitung ist also $\dfrac{d\tau_0}{dx''} = 0$ so wird auch $a_0'' = 0$ sein. Im Rahmen der Geradlinig Gleichförmig Beschleunigten Bezugssysteme wird man die Gleichung (102) natürlich so interpretieren, dass eine beschleunigte Bewegung den Ausdruck $\dfrac{d\tau_0}{dx''} \neq 0$ zur Folge hat und nicht mehr. Erst das Konzept der expandierenden und kollabierenden Räume mit der in ihm enthaltenen fünften Wechselwirkung legt nahe, dass Gleichung (102) auch von rechts nach links gelesen werden kann. Ich formuliere diesen Sachverhalt als Satz:

Satz 14 (Zeitantrieb) *Gegeben sei ein Inertialsystem S . Wir betrachten die Koordinaten x_0 und x_1 die dicht beieinander liegen sollen. Gelingt es uns dafür zu sorgen, dass die Zeit an der Koordinate x_1 etwas (z.B. ein Millionstel eines Milliardstels) schneller geht als an der Koordinate x_0 so wird sich zwischen x_0 und x_1 ein Beschleunigungsfeld aufbauen welches von x_1 nach x_0 zeigt.*

Jetzt wird man aber sagen, es geht also darum zwischen den Koordinatenpunkten x_0 und x_1 ein künstliches Gravitationsfeld aufzubauen. Aber genau das ist damit nicht gemeint. Das Gravitationsfeld selbst stellt **eine Möglichkeit** den Zeitantrieb zu realisieren. Dafür sind aber große Massen notwendig. Eine fünfte Wechselwirkung könnte den Zeitantrieb viel effizienter realisieren. Der Satz 14 zielt also darauf das Gravitationsfeld derart neu zu interpretieren um sein eigentlichen Kern den Zeitantrieb hervorzuheben, und sagt über die Art der Realisierung gar nichts aus.

2 Expandierende und Kollabierende Räume

2.1 Einleitung

Die vorliegende Arbeit könnte dem 21. Jahrhundert ihren Stempel aufdrücken, allerdings nicht so wie Albert Einstein vor etwa hundert Jahren mit seiner Allgemeinen Relativitätstheorie dem 20. Jahrhundert sein Stempel aufgedrückt hat. Diesmal geht es um mehr, um viel viel mehr. Ich habe bei dieser Theorie so ein Gefühl der Verspätung im Nacken, nicht nur weil ich selbst 25 Jahre dafür gebraucht habe sondern, weil wir als Menschheit die letzten 80 Jahre in Sachen Gravitation praktisch verschlafen haben. Für diese Verspätung wird man viele Gründe aufzählen. Angefangen von der Profillosigkeit der Wissenschaft in Bezug auf Politik und Religion, die längst Hand in Hand gehen, bis hin zu der Allgemeinen Relativitätstheorie Einsteins die einerseits einen großartigen Versuch darstellt die Gravitation zu ergründen, aber andererseits wegen der Widerspenstigkeit dieses Phänomens den ersehnten Erfolg, die Quantengravitation zu erschließen nicht vermochte.

Physik ist der Kampf des menschlichen Geistes gegen das Universum, mit dem Ziel dieses zu verstehen in der Hoffnung am Ende sich selbst zu verstehen. Das Universum teilen wir dabei gerne in Elemente wie Materie, Raumzeit, Licht u.s.w. auf. Ferner glauben wir, dass das Verstehen diese Elemente, durch Aufzählung alle ihre Eigenschaften erreichbar sein könnte. So hält der menschlicher Geist Ausschau nach jenen wertvollen Eigenschaften die sich hin und wieder in der Natur uns offenbaren. Eine dieser Elemente aus dem das Universum besteht,die Raumzeit, trotzt nach wie vor am hartnäckigsten dem menschlichen Geist sie zu entschlüsseln. Man kann ohne zu übertreiben sagen, dass bislang nur eine Schlacht in einem Jahrtausende andauernden Krieg gegen die Raumzeit wirklich mit Erfolg gekrönt war. Einsteins Spezielle Relativitätstheorie. Ihr verdanken wir die bizarre Relativität von Raum und Zeit, die nicht zu begreifende Konstanz der Lichtgeschwindigkeit sowie letztendlich die Einheit von Raum und Zeit zu der Raumzeit.

Der Versuch Einsteins diesen Erfolg mit der Allgemeinen Relativitätstheorie fortzusetzen und der widerspenstigen Raumzeit eine noch größere Niederlage zu bescheren verdient den höchsten Respekt. Noch während ich diese Zeilen schreibe fällt mir die Einordnung dieser genialen Idee der Raumzeitkrümmung schwer. Obgleich ich der Meinung bin, dass das Konzept der Expandierenden und Kollabierenden Räume zur Deutung der Gravitation die erste Wahl darstellt, weigert sich mein Verstand in der Raumzeitkrümmung einen Fehler zu sehen.

Die Einleitung bis zu dieser Stelle wurde von mir geschrieben, bevor mir klar wurde, wie sich das Konzept der Expandierenden und Kollabierenden Räume zu der Raumzeitkrümmung verhält. Ursprünglich dachte ich die beiden Vorstellungen würden miteinander konkurrieren. Falls das Konzept der Expandierenden und Kollabierenden Räume wahr sein sollte musste dann die Raumzeitkrümmung falsch sein. Aber genau hier war die Unsicherheit am größten. Die Raumzeitkrümmung sagt alle experimentellen Ergebnisse richtig voraus und ist obendrein von hohe ästhetischer Schönheit. Auf der anderen Seite sind die Expandierenden und Kollabierenden Räume logisch konsequent. Im Abschnitt "Das äußere Gravitationsfeld"löst sich dieser Konflikt endlich auf. Die Raumzeitkrümmung entpuppt sich als die Sicht des stationären Bezugssystems und die Allgemeine Relativitätstheorie beschreibt diese Sicht mathematisch. Die Expandierenden und Kollabierenden Räume dagegen bieten eine Umfangreichere Sicht auf die Gravitation und schließen die Allgemeine Relativitätstheorie mit ein.

2.2 Die Entdeckung

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts haben eine Gruppe von Astronomen durch ihre Beobachtungen bewiesen, das unsere Galaxie nicht die einzige im Universum ist sondern dass es im Universum noch unzählige andere Galaxien gibt. Ferner haben Sie bei der Spektralanalyse des Lichtes dieser Galaxien auf Rotverschiebung gestoßen aus der Sie die Radialgeschwindigkeit der Galaxien bestimmten. Besonders der Astronom Edwin Hubble konnte die so bestimmte Radialgeschwindigkeit mit der von ihm für astronomische Zwecke einigermaßen genau abgeschätzten Entfernungen in Beziehung setzen und fand dabei einen linearen Zusammenhang zwischen der Radialgeschwindigkeit, die Fluchtgeschwindigkeit v_{Flucht} genannt wird, und der Entfernung r heraus.

$$v_{Flucht} \approx H \cdot r \tag{103}$$

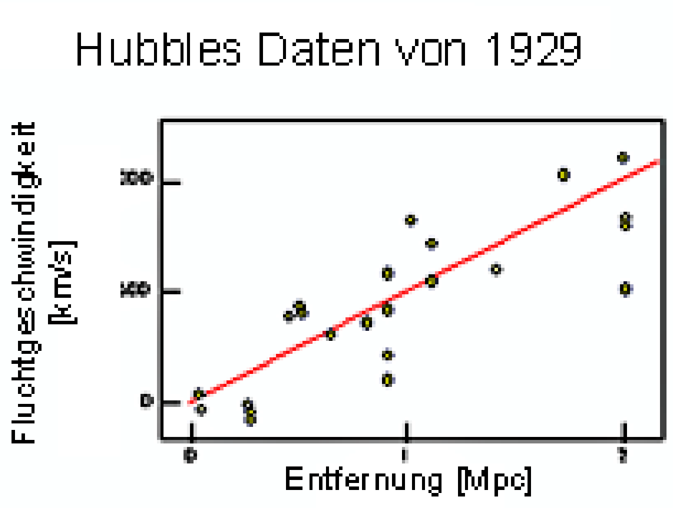


Abbildung 21

Die moderne Astronomie interpretiert die Existenz einer Fluchtgeschwindigkeit die praktisch alle entfernten Galaxien haben, egal in welche räumliche Lage sie zu uns stehen, als Expansion des Universums. Demnach kommt die Rotverschiebung nicht als Dopplereffekt zur Stande weil die Fluchtgeschwindigkeit keine reale Geschwindigkeit ist. Vielmehr wird die Wellenlänge des Lichtes auf dem Weg zu uns durch die Expansion des Raumes gestreckt. Ohne Zweifel handelt es sich hierbei um eines der größten Entdeckungen aller Zeiten. Allerdings scheint die Interpretation sowie die Einordnung dieser großartigen Entdeckung noch immer große Schwierigkeiten zu bereiten. So wird heute angenommen dass die Expansion des Universums mit der Allgemeinen Relativitätstheorie im Einklang steht, was auf Dauer nicht haltbar sein dürfte. Das Anliegen der vorliegenden Arbeit ist es diesen Ungenauigkeiten auf den Grund zu gehen und das wahre Potential dieser Entdeckung freizulegen.

2.3 Erste Betrachtungen

Ich beginne mit einem Satz der die Expansion des Universums zu dem macht was sie für diese Arbeit ist. Zu einer Voraussetzung.

Satz 15 (Expansionssatz) *Das Universum expandiert.*

Beweis 9 *Dieser Satz wird durch die Beobachtung der Rotverschiebung bewiesen.*

Sollte es irgend jemandem gelingen für die Rotverschiebung die wir messen eine bessere Erklärung zu finden als die Expansionshypothese so erübrigen sich die nachfolgenden Überlegungen. Satz 15 ist aber in dieser Form nicht sehr brauchbar. Mit dem nächsten Satz überführe ich Satz 15 in eine brauchbare Form.

Satz 16 (Expansion des Raumes) *Der Raum besitzt die Fähigkeit zu expandieren.*

Beweis 10 *Da nach Satz 15 das Universum expandiert und damit das Volumen des Universums größer wird, expandiert auch der Raum. Folglich muss die Expandierbarkeit auch eine Eigenschaft des Raumes sein.*

Unser Universum befindet sich zur Zeit in einem Zustand der schwachen Expansion. Deshalb können die Auswirkungen dieser Expansion lokal nicht beobachtet werden. Da der jetzige Zustand unseres Universums nicht das Maß aller Dinge ist, möchte ich mich mit dem nächsten Schritt davon befreien. Ich stelle mir vor wir würden uns in einem Universum befinden welches sehr stark expandiert. Was würden wir lokal in einem solchen Universum beobachten? Um diese Frage zu beantworten stellen wir uns weiter vor, wir würden im Raum zwei Probemassen aussetzten und zwar so, dass sie in dem Moment wenn wir sie loslassen relativ zueinander ruhen. Da das Universum in dem wir uns befinden per Definition expandiert werden wir erwarten, dass der Abstand der Probemassen zueinander mit der Zeit zunimmt. Die Probemassen werden sich also voneinander entfernen. Solche Gedankenexperimente wie mit den beiden Probemassen haben einen lokalen Charakter. Deswegen werde ich im weiteren nicht mehr von einem expandierenden Universum sondern von einem lokal expandierenden Raum sprechen. Damit ist vorerst aber nicht gesagt dass der Raum auch lokal begrenzt expandieren kann sondern es ist lediglich so, dass uns das weitere Geschehen im Universum nicht weiter interessiert.

Definition 5 (freie Expansion) *Zwei Probemassen, die wie oben beschrieben in einem expandierenden Raum ausgesetzt werden üben die freie Expansion aus.*

In dieser Begriffsbildung spielt das Wort „frei“ die entscheidende Rolle und steht in Beziehung zum „freien“ Fall in einem Gravitationsfeld. Denn an dieser Stelle fiel mir ein was Einstein zum Thema "freier Fall"gesagt hatte. Laut Einstein macht sich die Gravitation genau dann bemerkbar wenn der freie Fall unterbunden wird. Ich fragte mich also was wohl passieren würde, wenn wir die freie Expansion der beiden Probemassen unterbinden würden ? Die Antwort auf diese Frage zeigt dass expandierende Räume nicht Kräfte frei sind.

Satz 17 (Kräfte in Expandierenden Räumen) *Wird in einem expandierenden Raum, die freie Expansion zweier Probemassen unterbunden, so macht sich eine Kraft bemerkbar.*

Beweis 11 *Nehmen wir als Probemassen zwei Tennisbälle an und binden sie mit einem Seil so aneinander, dass wenn wir sie in einem expandierenden Raum aussetzen, sie sich nicht mehr voneinander entfernen können. Damit ist die freie Expansion unterbunden. Stellen wir uns weiter vor auf jeden der Tennisbälle befände sich eine Ameise die ihrerseits mit ihren Zangen ein Stückchen Blatt festhält. Siehe Abbildung 22.*

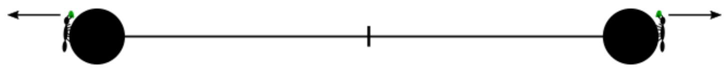


Abbildung 22

Nehmen wir weiter an, dass beide Ameisen ihrer Blätter mehr oder weniger gleichzeitig im Raum aussetzen. Da der Raum laut Voraussetzung expandiert, würden sich die Blätter voneinander entfernen. Die Ameisen würden daher feststellen, dass von ihnen im Raum ausgesetzte Gegenstände, sich bevorzugt in einer Richtung bewegen. Um nicht selber im Raum abzudriften, müssten auch sie sich auf den Tennisbällen festhalten. Unsere beiden Ameisen befinden sich also in einem ähnlichen Zustand, wie eine entlang der Decke krabbelnde Ameise im Gravitationsfeld der Erde. Auch diese Ameise kann sich nicht leisten sein Futter sorglos im Raum auszusetzen, oder die eigene Haftung an der Decke zu verlieren. Die beiden Ameisen befinden sich also auch in einem Kraftfeld.

Machen wir noch ein Gedankenexperiment, und setzen diesmal 5 Probemassen entlang einer Linie gleichzeitig im Raum aus. Zusätzlich fordern wir intuitiv dass der Raum homogen und mit konstanter Stärke expandieren soll. Siehe Abbildung 23 . Auch wenn im Diagramm die Probemasse m_3 als zentral gezeichnet wurde, so sind wegen der homogenen Expansion alle Probemassen gleichberechtigt. Insbesondere sind die Paare (m_1, m_2) , (m_2, m_3) , (m_3, m_4) , (m_4, m_5) gleich berechtigt. Deswegen muss zu jedem Zeitpunkt die Abstände der Massenpaare stets gleich sein.

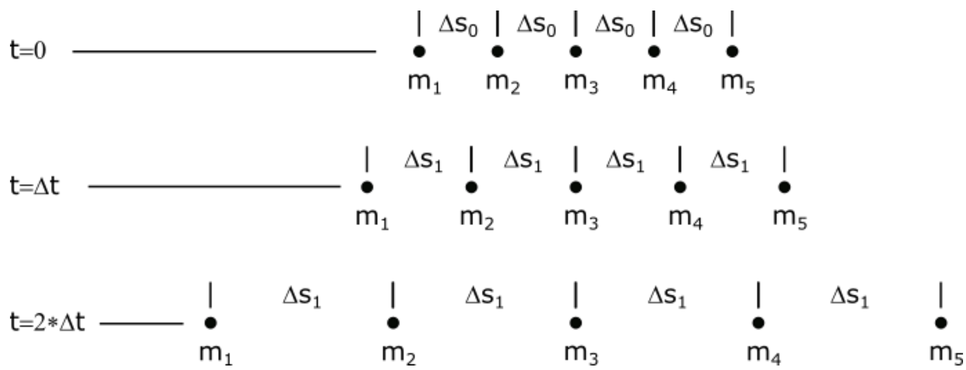


Abbildung 23

Wählen wir das Koordinatensystem so, dass sich dabei die Probemasse m_3 im Ursprung befindet, und schreiben für die Entfernung von m_1 vom Ursprung r_1 und für die Entfernung von m_2 vom Ursprung r_2 dann gilt offensichtlich

$$r_1(t) = 2 \cdot r_2(t) \quad \text{nach zweimaligem differentieren nach der Zeit} \quad a_1(t) = 2 \cdot a_2(t) \tag{104}$$

Vom Ursprung des Koordinatensystems ausgesehen erfährt m_1 stets eine doppelt so hohe Beschleunigung wie m_2 . m_1 ist aber auch stets doppelt so weit weg wie m_2 . Das impliziert die Schlussfolgerung, dass in homogen und mit konstanter Stärke expandierenden Räumen gilt

$$a(r) = \varepsilon'^2 \cdot r \tag{105}$$

Hierbei ist ε' ein Maß für die zeitlich konstante Stärke der Expansion.

Damit ist vor erst alles über expandierende Räume gesagt. Es stellt sich jetzt die Frage „Ob expandierende Räume umkehrbar sind.“ Kann der „expandierende“ Raum auch „kollabieren? “
Ich behandele jetzt auch die kollabierende Räume ähnlich wie die expandierenden Räume um dann zu schauen, ob die so abstrakt eingeführten kollabierenden Räume eine Entsprechung in der Natur haben.

Definition 6 (freies Kollabieren) *Zwei Probemassen, die wir in einem kollabierenden Raum aussetzen üben das freie Kollabieren aus.*

Satz 18 (Kräfte in Kollabierenden Räumen) *Wird in einem kollabierenden Raum, das freie Kollabieren zweier Probemassen unterbunden, so macht sich eine Kraft bemerkbar.*

Beweis 12 *Der Beweis geht genauso wie in Satz 17 , nur dass wir statt einen Seil einen starren Körper benutzen müssen.*

Nehmen wir an, der Raum in dem wir leben würde homogen und mit konstante Stärke kollabieren. Nehmen wir ferner an wir würden zwei Probemassen im Raum aussetzen und zwar so dass sie Anfangs relativ zueinander in Ruhe sind. Wir würden dann Beobachten wie sie immer schneller werdend sich aufeinander zubewegen, irgend wann zusammenstoßen, ihre Bewegungsrichtung umkehren und in ihre ursprüngliche Lage zurückkehren. Unter der Bedingung dass die Energieerhaltung gilt, würde sich diese oszillierende Bewegung ewig fortsetzen. Siehe Abbildung 24

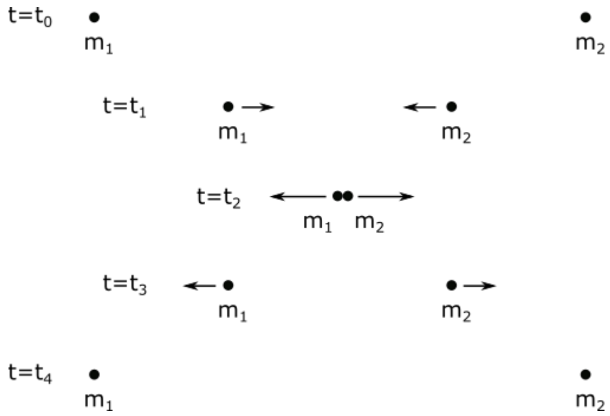


Abbildung 24

Jetzt machen wir ein Gedankenexperiment mit drei Probemassen, die wir wieder in einem homogen und mit konstanter Stärke kollabierenden Raum aussetzen.(siehe Abbildung 25) Zum Zeitpunkt $t = 0$ sollen die Probemassen relativ zueinander in Ruhe sein. Und zum Zeitpunkt $t = T$ mögen sie wie zu erwarten ist zusammenstoßen. Da die Paare (m_1, m_2) und (m_2, m_3) gleichberechtigt sind, stoßen sie gleichzeitig zusammen. Dann stoßen aber auch die Probemassen m_1 und m_3 zusammen. Sie hatten aber ursprünglich die doppelte Entfernung wie zu m_2 zueinander. Es ist also so, dass die Zeit T eher eine konstante darstellt. Die Frequenz der oszillierenden Bewegung scheint also unabhängig, von der Entfernung zu sein. Wir können daher den folgenden Ansatz machen:

$$r\left(t\right) = r_0 \cdot cos\left(\kappa' \cdot t\right) \tag{106}$$

Dabei ist κ' ein Maß für die Stärke des Kollabierens. Hier raus folgt wieder durch zweimaliges differenzieren

$$a\left(r\right) = -\kappa'^2 \cdot r \tag{107}$$

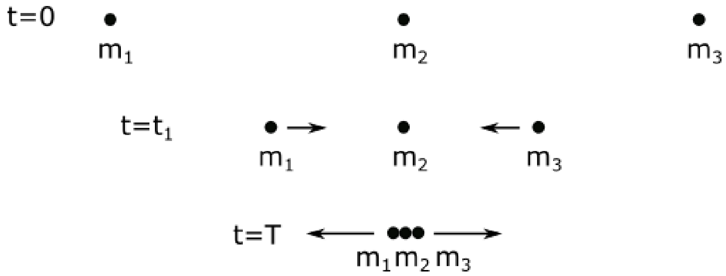


Abbildung 25

Jetzt stellen wir aber die entscheidende Frage in Bezug auf Kollabierende Räume: „Haben die Kollabierenden Räume in der Natur eine Entsprechung? “
Um dieser Frage auf den Grund zu gehen betrachten wir einen Beobachter der durch einen Tunnel in der Erde frei fällt. Der Beobachter soll sich in einem Kasten befinden

und mit der Außenwelt in keinem Kontakt stehen. Gerade wenn seine Schwingungsbewegung den Umkehrpunkt erreicht hat möge er im Raum zwei Probemassen aussetzen. Per Zufall sollen die Probemassen dabei vom Mittelpunkt der Erde gleich weit entfernt sein. Damit werden äußere, im Gravitationsfeld der Erde stationäre Beobachter, die in den Kasten hineinsehen können, erkennen, dass wegen der Symmetrie die Probemassen im Mittelpunkt der Erde zusammenstoßen, ihre Impulse austauschen und dann wieder auseinander fliegen werden. Dort auf der anderen Seite der Erde würden sie wieder zur Ruhe kommen und der Ablauf würde sich erneut wiederholen. Siehe Abbildung 26

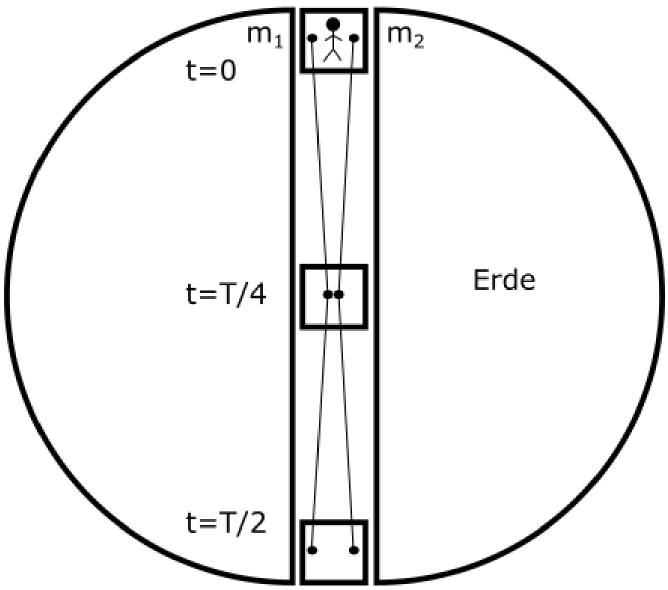


Abbildung 26

Uns interessiert jetzt die Frage, wie der Beobachter im Kasten das Geschehen beurteilt. Da der Beobachter mit den Probemassen mit fällt, würde er deren relative Bewegung zur Erde nicht mitbekommen. Er würde lediglich wahrnehmen, wie von ihm im Raum ausgesetzte Probemassen anfangen sich aufeinander zu zubewegen um dann zusammen zu stoßen, um anschließend ihre ursprüngliche Position im Raum wieder einzunehmen. Er würde erkennen dass sich diese oszillierende Bewegung ständig wiederholt. Der Zustand des frei fallenden Beobachters im Kasten scheint dem Zustand eines in einem kollabierenden Raum frei schwebenden Beobachters zu ähneln. Die Gleichsetzung von kollabierenden und gravitierenden Räumen lässt sich im Konzept der expandierenden und kollabierenden Räumen nicht vermeiden und bringt beträchtliche Konsequenzen mit sich. Denn wenn wir den kollabierenden Räumen die Wechselwirkung Gravitation zuordnen, dann werden wir auch den expandierenden Räumen eine Wechselwirkung zuordnen müssen. Diese neue Wechselwirkung nenne ich die fünfte Wechselwirkung.

2.4 Einführung in die expandierende und kollabierende Räume

Ob der Raum expandiert oder kollabiert lässt sich feststellen durch die Beobachtung von Probemassen die im Raum ausgesetzt werden. Diesen Umstand nutze ich aus um expandierende und kollabierende Räume zu definieren.

Definition 7 (Expandierende Räume) *Ein Raumbereich befindet sich im Zustand der Expansion wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. *In diesem Raumbereich ausgesetzte Probemassen entfernen sich voneinander, auch wenn sie ursprünglich relativ zueinander in Ruhe waren.*

2. *Für das Auseinanderdriften der Probemassen können wir die elektromagnetische Wechselwirkung sowie die Gravitationswechselwirkung ausschliessen.*

Definition 8 (Kollabierende Räume) *Ein Raumbereich befindet sich im Zustand des Kollabierens wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. *In diesem Raumbereich ausgesetzte Probemassen nähern sich zueinander, auch wenn sie ursprünglich relativ zueinander in Ruhe waren.*

2. *Für die gegenseitige Annäherung der Probemassen können wir die elektromagnetische Wechselwirkung sowie die eigene Gravitationswechselwirkung ausschließen.*

Bei der Definition der Kollabierenden Räume fällt auf, dass nur die eigene Gravitation der Probemassen ausgeschlossen wird, während Fremdgravitation zulässig ist. Dahinter steckt natürlich die Gleichsetzung der gravitierenden und kollabierenden Räume.

Für ein erstes Beispiel betrachten wir einen Raumbereich der laut Forderung expandieren soll. Setzen wir jetzt acht Probemassen in diesem Raum derart aus, dass sie zusammen einen Würfel mit dem Volumen z.B. $V_1 = 10m^3$ bilden. Siehe Abbildung 27 Da der Raum expandiert wird sich das Volumen des Würfels ändern und die Probemassen auseinander driften. Nach $\Delta t = 5s$ mögen die Probemassen einen Würfelvolumen $\Delta V_2 = 10m^3 + 200cm^3$ einschließen.

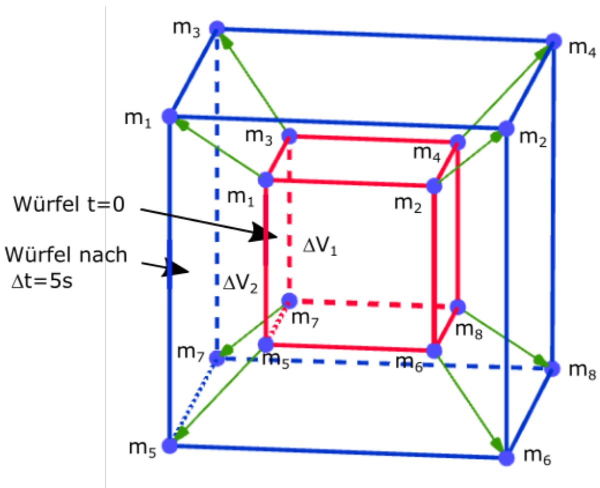


Abbildung 27

Dann können wir sagen dass sich der betrachtete Raumbereich um $\Delta V = V_2 - V_1 = 200cm^3$ geändert hat und dafür die Zeit $\Delta t = 5s$ benötigt hat. Das ergibt eine Änderungsgeschwindigkeit von

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{200cm^3}{5s} = 40 \cdot \frac{cm^3}{s}$$

Diese Größe gibt aber noch nicht die Stärke der Expansion an, da es unklar ist worauf es sich bezieht. Teilen wir noch durch das Anfangsvolumen ΔV_1 so erhalten wir eine Größe, die von nun an auf Schritt und Tritt vorkommen wird.

$$\frac{1}{\Delta V_1} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{1}{10m^3} \cdot \frac{200cm^3}{5s} = 4 \cdot \frac{cm^3}{m^3 \cdot s}$$

In diesem Fall beträgt die Stärke der Expansion also $4cm^3$ pro m^3 , pro s .

Obwohl der Ausdruck $\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt}$ eine sinnvolle Größe darstellt um die Expansionsstärke zu definieren, ist die Methode nach dem letzten Beispiel nicht ganz korrekt. Wir werden sehen dass wir so nur eine untere Grenze messen können. Die richtige Aussage nach dem obigen Beispiel sollte daher lauten:

Der Raum expandiert mindestens mit einer Stärke von $4 \cdot \frac{cm^3}{m^3 \cdot s}$.

Dieses einfache Beispiel zeigt, dass wir es mit zweierlei Dingen zu tun haben.

1. Mit dem Raum und sein Verhalten.
2. Mit dem Verhalten von Probemassen die sich in dem betrachteten, expandierenden oder kollabierenden Raum befinden.

Zuerst sehen wir uns einen homogen und mit konstanter Stärke expandierenden oder kollabierenden kugelförmigen Volumen V an. Für den Radius verwende ich R. Mit $R(t)$ und $V(t)$ werde ich das Verhalten des Raumes beschreiben und mit $r(t)$ das Verhalten der Probemassen.

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \qquad \text{einmal nach der Zeit differenziert}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3 \cdot R^2 \cdot \frac{dR}{dt} = V \cdot \frac{3}{R} \cdot \frac{dR}{dt}$$

Lösen wir diese Gleichung nach $\frac{dR}{dt}$ auf.

$$\frac{dR}{dt} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt} \right) \cdot R \tag{108}$$

Wobei der Ausdruck $\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt}$ in Klammern gesetzt wurde, da er wie wir oben gesehen haben eine physikalische Bedeutung hat. Nochmal nach der Zeit differenziert ergibt dann

$$\frac{d^2R}{dt^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt} \right) \cdot R + \frac{1}{9} \left(\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt} \right)^2 \cdot R \tag{109}$$

Betrachten wir den einfachsten Fall, dass der Raum homogen und zeitlich konstant expandiert und/oder kollabiert. Damit verschwindet die Zeitableitung im ersten Term

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt} \right) = 0 \qquad \text{damit} \qquad \left(\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt} \right) = konstant \tag{110}$$

Um expandierende und kollabierende Räume abzudecken reichen die reellen Zahlen nicht aus und wir müssen auf die komplexen Zahlen ausweichen und setzen ganz allgemein an

$$\left(\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt} \right) = \varepsilon + i \cdot \kappa \quad \text{mit } \varepsilon \text{ , } \kappa \in \mathbb{R} \text{ und } \varepsilon \geq 0 \text{ , } \kappa \leq 0 \tag{111}$$

Diese Differentialgleichung wird gelöst durch den Ansatz

$$V(t) = V_0 \cdot e^{(\varepsilon + i \cdot \kappa) \cdot t} \quad , \quad t \in \mathbb{R} \text{ , } t \geq 0 \tag{112}$$

Es gilt $\kappa < 0$ da κ ein Maß für die Stärke des Kollabierens ist und im Gegensatz zu $0 < \varepsilon$ negativ sein wird. Für den trivialen Fall $\varepsilon = 0$ und $\kappa = 0$ ergibt sich der nicht expandierende und nicht kollabierende Raum der Speziellen Relativitätstheorie. Um nur expandierende oder nur kollabierende Räume zu untersuchen setze ich Wahlweise ε und κ null.

Sei zuerst $\kappa = 0$, dann folgt

$$V(t) = V_0 \cdot e^{\varepsilon \cdot t} \tag{113}$$

Einmal nach der Zeit differenziert und nach ε aufgelöst ergibt

$$\varepsilon = \frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt} \tag{114}$$

setzen wir dies in die Gleichung (109) ein, so folgt für homogen und mit konstanter Stärke expandierende Räume

$$\frac{d^2R}{dt^2} = \frac{1}{9} \cdot \varepsilon^2 \cdot R \tag{115}$$

Dieses ähnelt der Gleichung (105) $\frac{d^2r}{dt^2} = \varepsilon'^2 \cdot r$ die wir aus einfachen Überlegungen gewonnen hatten. Durch die Gleichsetzung

$$\varepsilon' = \frac{1}{3} \cdot \varepsilon \tag{116}$$

erhalten wir die wichtige Gleichung

$$\frac{d^2R}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2} \tag{117}$$

Sie besagt, dass eine Probemasse in homogen und mit konstanter Stärke expandierenden Räumen eine Beschleunigung erfährt, die dem beschleunigten Wachstum von R entspricht.

Setzen wir jetzt $\varepsilon = 0$ so folgt zuerst

$$V(t) = V_0 \cdot e^{i \cdot \kappa \cdot t} \tag{118}$$

Einmal nach der Zeit differenziert und nach κ aufgelöst ergibt

$$i \cdot \kappa = \frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt} \tag{119}$$

setzen wir dies in die Gleichung (109) ein, so folgt für homogen und mit konstanter Stärke kollabierende Räume

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{1}{9} \cdot \kappa^2 \cdot R \tag{120}$$

Hier ist R eine komplexe Funktion die ich zuerst in ihre Komponente zerlege.

$$R(t) = Re\left(R\left(t\right)\right) + i \cdot Im\left(R\left(t\right)\right)$$

setzen wir dies in die Gleichung (120) ein, so folgt

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{1}{9} \cdot \kappa^2 \cdot Re\left(R\left(t\right)\right) - i \cdot \frac{1}{9} \cdot \kappa^2 \cdot Im\left(R\left(t\right)\right) \tag{121}$$

vergleichen wir diese Gleichung mit der Gleichung (107) $\frac{d^2r}{dt^2} = -\kappa'^2 \cdot r$ die wir aus der einfachen Betrachtung kollabierende Räume gewonnen haben, und setzen noch

$$\kappa' = \frac{1}{3} \cdot \kappa \tag{122}$$

kann man wegen $r\left(t=0\right) = r_0$ und $Re\left(R\left(t=0\right)\right) = r_0$ erkennen, dass Gleichung (107) lediglich der Realanteil der komplexen Beschleunigung $\frac{d^2R}{dt^2}$ ist.

$$Re\left(\frac{d^2R}{dt^2}\right) = \frac{d^2r}{dt^2} \tag{123}$$

Wenn $\frac{d^2R}{dt^2}$ die Beschleunigung ist, die in einer homogen und mit konstanter Stärke kollabierenden Raum, auf einer Probemasse m wirkt, und davon gehe ich aus, so haben wir durch die einfache Betrachtung lediglich den Realanteil nach Gleichung (107) herausbekommen. Als nächstes möchte ich die speziellen Lösungen einzeln etwas gründlicher betrachten und insbesondere den imaginär Anteil bei den kollabierenden Räumen untersuchen.

2.5 Homogen und mit konstanter Stärke expandierende Räume

Für homogen und mit konstanter Stärke expandierende Räume hatten wir die Gleichung (113) gefunden.

$V(t) = V_0 \cdot e^{\varepsilon \cdot t} \quad \text{oder} \quad R(t) = R_0 \cdot e^{\frac{1}{3} \cdot \varepsilon \cdot t} \quad \text{für} \qquad 0 \leq t \in \mathbb{R}\ ,\ 0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$

Man kann das auch mit Hilfe der Hyperbolischen Funktionen ausdrücken.

$$R(t) = R_0 \cdot cosh\left(\frac{1}{3} \cdot \varepsilon \cdot t\right) + R_0 \cdot sinh\left(\frac{1}{3} \cdot \varepsilon \cdot t\right) \tag{124}$$

Aus der Gleichung (124) folgt für kleine Zeiten Δt die Näherung

$$R(t) = R_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} \cdot \varepsilon^2 \cdot \Delta t^2\right) + \frac{1}{3} \cdot \varepsilon \cdot R_0 \cdot \Delta t$$

$$R(t) = R_0 + \frac{1}{2} \cdot a\left(r_0\right) \cdot \Delta t^2 + \frac{1}{3} \cdot \varepsilon \cdot R_0 \cdot \Delta t \tag{125}$$

Der erste Teil $\quad R_0 + \frac{1}{2} \cdot a\left(r_0\right) \cdot \Delta t^2 \quad$ von Gleichung (125) beschreibt die Bewegung einer Probemasse m, die an der Koordinate $r_0 = R_0$ der freien Expansion überlassen wird. Da dieser Teil die Näherung von $\quad R_0 \cdot cosh\left(\frac{1}{3} \cdot \varepsilon \cdot t\right) \quad$ kann man folgendes vermuten.

Satz 19 *Wird eine Probemasse m in einem homogen und mit konstanter Stärke expandierenden Raumbereich von der Koordinate r_0 mit der Angfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ der freien Expansion überlassen so gilt für die Ortskoodinate*

$$r(t) = R_0 \cdot cosh\left(\frac{1}{3} \cdot \varepsilon \cdot t\right) = r_0 \cdot cosh\left(\frac{1}{3} \cdot \varepsilon \cdot t\right) \tag{126}$$

Beweis 13

Aus der Gleichung (115) $\quad \frac{d^2R}{dt^2} = \frac{1}{9} \cdot \varepsilon^2 \cdot R \quad$ *erhalten wir*

$$v \cdot dv = \frac{1}{9} \cdot \varepsilon^2 \cdot R \cdot dR \qquad \text{oder} \qquad \int_0^v v \cdot dv = \int_0^R \frac{1}{9} \cdot \varepsilon^2 \cdot R \cdot dR$$

$$\frac{1}{2} \cdot v^2 = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot \varepsilon^2 \cdot \left(R^2 - R_0^2\right) \qquad \text{oder} \qquad v = \frac{1}{3} \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{R^2 - R_0^2}$$

$$\int_{R_0}^R \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R}{R_0}\right)^2 - 1}} \cdot dR = \int_0^t \frac{1}{3} \cdot \varepsilon \cdot R_0 \cdot dt$$

$$\frac{dR}{\sqrt{R^2 - R_0^2}} = \frac{1}{3} \cdot \varepsilon \cdot dt \qquad oder \qquad \int_{R_0}^{R} \frac{1}{\sqrt{R^2 - R_0^2}} \cdot dR = \int_0^t \frac{1}{3} \cdot \varepsilon \cdot dt$$

$$Subsitution: \quad \frac{R}{R_0} = cosh\,(x) \qquad damit \quad \frac{dR}{R_0} = sinh\,(x) \cdot dx$$

$$aus \quad R = R_0 \quad folgt \quad \frac{R_0}{R_0} = 1 = cosh\,(x_1) \qquad damit \quad x_1 = 0$$

$$aus \quad \frac{R}{R_0} = cosh\,(x) \qquad folgt \quad x_2 = arcosh\left(\frac{R}{R_0}\right)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{R_0 \cdot sinh\,(x)}{\sqrt{cosh\,(x)^2 - 1}} \cdot dx = \int_0^{arcosh\left(\frac{R}{R_0}\right)} R_0 \cdot dx = R_0 \cdot arcosh\left(\frac{R}{R_0}\right) = \frac{1}{3} \cdot \varepsilon \cdot R_0 \cdot t$$

$$R(t) = R_0 \cdot cosh\left(\frac{1}{3} \cdot \varepsilon \cdot t\right) \qquad oder\ mit \;\; r(t) \;\; anstatt \;\; R(t) \;\; ergibt\ Gleichung\ (126)$$

Weiter folgt aus $r(t) = R_0 \cdot cosh\left(\frac{1}{3} \cdot \varepsilon \cdot t\right)$ durch differenzieren

$$v(t) = \frac{dr}{dt} = \frac{1}{3} \cdot \varepsilon \cdot R_0 \cdot sinh\left(\frac{1}{3} \cdot \varepsilon \cdot t\right) \tag{127}$$

und durch Quadrieren und Multiplizieren mit $\frac{1}{2} \cdot m$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v(t)^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{1}{9} \cdot \varepsilon^2 \cdot R_0^2 \cdot sinh\left(\frac{1}{3} \cdot \varepsilon \cdot t\right)^2$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v(t)^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{1}{9} \cdot \varepsilon^2 \cdot \left(R_0^2 \cdot cosh\left(\frac{1}{3} \cdot \varepsilon \cdot t\right)^2 - R_0^2\right) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{1}{9} \cdot \varepsilon^2 \cdot \left(r^2 - r_0^2\right)$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v(t)^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 2 \cdot \int_{r_0}^{r} \frac{1}{9} \cdot \varepsilon^2 \cdot r \cdot dr = m \cdot \int_{r_0}^{r} a \cdot dr = \int_{r_0}^{r} F \cdot dr$$

Damit können wir Gleichung (124) auch folgendermaßen schreiben

$$R(t) = r(t) + R_0 \cdot sinh\left(\frac{1}{3} \cdot \varepsilon \cdot t\right) \tag{128}$$

Einmal nach der Zeit abgeleitet ergibt

$$\frac{dR(t)}{dt} = \frac{dr}{dt} + \frac{1}{3} \cdot \varepsilon \cdot r(t) \tag{129}$$

leiten wir nochmal nach der Zeit ab

$$\frac{d^2R(t)}{dt^2} = \frac{d^2r(t)}{dt^2} + \frac{1}{3} \cdot \varepsilon \cdot \frac{dr(t)}{dt} \tag{130}$$

Differenzieren wir einmal die Gleichung (124) nach der Zeit

$$\frac{dR(t)}{dt} = \frac{1}{3} \cdot \varepsilon \cdot R_0 \cdot sinh\left(\frac{1}{3} \cdot \varepsilon \cdot t\right) + \frac{1}{3} \cdot \varepsilon \cdot R_0 \cdot cosh\left(\frac{1}{3} \cdot \varepsilon \cdot t\right) \tag{131}$$

so sehen wir, dass zum Zeitpunkt $t = 0$, R die folgende Geschwindigkeit hat.

$$\frac{dR(t=0)}{dt} = \frac{1}{3} \cdot \varepsilon \cdot R_0 \tag{132}$$

Die folgende Umformung zeigt welche Bedeutung diese Geschwindigkeit hat.

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{1}{9} \cdot \varepsilon^2 \cdot R_0^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 2 \cdot \int_0^{R_0} \frac{1}{9} \cdot \varepsilon^2 \cdot R \cdot dR = m \cdot \int_0^{R_0} a \cdot dR$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \int_0^{R_0} F \cdot dR \tag{133}$$

Die Geschwindigkeit $\frac{dR}{dt}$ ist also jene Geschwindigkeit die eine Probemasse m, die fast vom Ursprung aus frei expandierend, in einem homogen und mit konstanter Stärke expandierenden Raum, an der Koordinate R_0 bekommen würde. Mit solchen, die fast vom Ursprung aus frei expandierenden Probemassen lässt sich die Expansion des Raumes messen und sichtbar machen.

Definition 9 (Messung der Expansionsstärke ε) *Die Stärke der Expansion eines Raumbereichs ε wird durch aussetzen von Probemassen im Raum nach der folgendem Vorschrift bestimmt.*

$$\varepsilon = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \cdot \frac{d\,(\Delta V)}{dt} \tag{134}$$

Umso kleiner das anfängliche Volumen ist umso geringer wird die vorhandene Expansionsgeschwindigkeit des Raumes sein, und umso besser wird die Bewegung der Probemassen die Expansion des Raumes wiedergeben.

2.6 Homogen und mit konstanter Stärke kollabierende Räume

Für homogen und mit konstanter Stärke kollabierende Räume hatten wir die Gleichung (118) gefunden.

$$V(t) = V_0 \cdot e^{i \cdot \kappa \cdot t} \quad \text{oder} \quad R(t) = R_0 \cdot e^{i \cdot \frac{1}{3} \cdot \kappa \cdot t} \qquad \text{für} \qquad 0 \leq t \in \mathbb{R}\ ,\ 0 > \kappa \in \mathbb{R}$$

Gleichung (118) beschreibt eine Rotation auf der komplexen Zahlenebene. Der Realanteil $Re\,(V\,(t)) = V_0 \cdot cos\,(\kappa \cdot t)$ entspricht eher unserer Vorstellung vom dreidimensionalen Raum. Um zu sehen wie Gleichung (118) sich für kleine Zeiten $\Delta t << 1$ verhält nähern wir sie an.

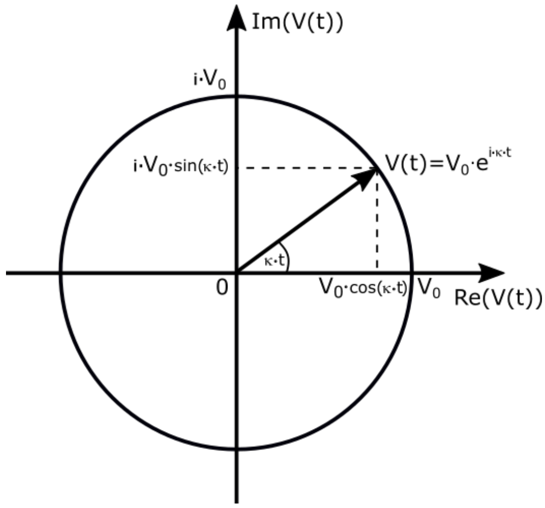


Abbildung 28

$$V(t) \approx V_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \kappa^2 \cdot \Delta t^2\right) + i \cdot V_0 \cdot \kappa \cdot \Delta t$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} \approx -V_0 \cdot \kappa^2 \cdot \Delta t + i \cdot V_0 \cdot \kappa \qquad \textbf{oder} \qquad \frac{1}{V_0} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t} \approx -\kappa^2 \cdot \Delta t + i \cdot \kappa \tag{135}$$

Gleichung (135) entnimmt man sehr schön wie die Definition von κ über $Im\left(\frac{1}{V_0} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t}\right)$ zur Stande kommt. Denn für kleinere Zeiten Δt geht $Re\left(\frac{1}{V_0} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t}\right)$ gegen Null. Differenzieren wir Gleichung (135) noch einmal nach der Zeit, so kommen wir über den Realanteil an κ ran.

$$\frac{\Delta}{\Delta t}\left(\frac{1}{V_0} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t}\right) \approx -\kappa^2 + i \cdot 0 \tag{136}$$

Allerdings ist V nicht die Messgröße. Die eigentliche Messgröße ist $r\,(t)$. Um sie zu erhalten stellen wir Gleichung (118) mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen dar.

$$R(t) = R_0 \cdot cos\left(\frac{1}{3} \cdot \kappa \cdot t\right) + i \cdot R_0 \cdot sin\left(\frac{1}{3} \cdot \kappa \cdot t\right) \tag{137}$$

für kleine Zeiten Δt können wir die folgende Näherung machen.

$$R(t) = R_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} \cdot \kappa^2 \cdot \Delta t^2\right) + i \cdot R_0 \cdot \frac{1}{3} \cdot \kappa \cdot \Delta t$$

$$R(t) = R_0 - \frac{1}{2} \cdot |a(r_0)| \cdot \Delta t^2 - i \cdot R_0 \cdot \frac{1}{3} \cdot |\kappa| \cdot \Delta t \qquad \text{da} \qquad \kappa < 0 \tag{138}$$

Der erste Teil $R_0 - \frac{1}{2} \cdot |a(r_0)| \cdot \Delta t^2$ von Gleichung (138) beschreibt die Bewegung einer Probemasse m, die an der Koordinate $r_0 = R_0$ dem freien Kollabieren überlassen wird. Da dieser Teil die Näherung von $R_0 \cdot cos\left(\frac{1}{3} \cdot \kappa \cdot t\right)$ ist kann man folgendes vermuten.

Satz 20 *Wird eine Probemasse m in einem homogen und mit konstanter Stärke kollabierenden Raumbereich von der Koordinate r_0 mit der Angfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ dem freien Kollabieren überlassen so gilt für die Ortskoordinate*

$$r(t) = R_0 \cdot cos\left(\frac{1}{3} \cdot \kappa \cdot t\right) = r_0 \cdot cos\left(\frac{1}{3} \cdot \kappa \cdot t\right) \tag{139}$$

Beweis 14

*Aus der Gleichung (**??**)* $\quad \frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{1}{9} \cdot \kappa^2 \cdot Re(R) == -\frac{1}{9} \cdot \kappa^2 \cdot r \quad$ *folgt*

$$v \cdot dv = -\frac{1}{9} \cdot \kappa^2 \cdot r \cdot dr \qquad oder \qquad \int_0^v v \cdot dv = \int_{r_0}^r -\frac{1}{9} \cdot \kappa^2 \cdot r \cdot dr$$

$$\frac{1}{2} \cdot v^2 = -\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot \kappa^2 \cdot \left(r^2 - r_0^2\right) \qquad oder \qquad v = \frac{1}{3} \cdot \kappa \cdot \sqrt{r_0^2 - r^2} \quad mit \quad \kappa < 0$$

$$\frac{dr}{\sqrt{r_0^2 - r^2}} = \frac{1}{3} \cdot \kappa \cdot dt \qquad oder \qquad \int_{r_0}^r \frac{1}{\sqrt{r_0^2 - r^2}} \cdot dr = \int_0^t \frac{1}{3} \cdot \kappa \cdot dt$$

$$\int_{r_0}^r \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2}} \cdot dr = \int_0^t \frac{1}{3} \cdot \kappa \cdot r_0 \cdot dt$$

Subsitution: $\quad \frac{r}{r_0} = cos(x) \qquad$ *damit* $\qquad \frac{dr}{r_0} = -sin(x) \cdot dx$

$$aus \qquad r = r_0 \qquad folgt \qquad \frac{r_0}{r_0} = 1 = cos\left(x_1\right) \qquad damit \qquad x_1 = 0$$

$$aus \qquad \frac{r}{r_0} = cos\left(x\right) \qquad folgt \qquad x_2 = arcos\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} -\frac{r_0 \cdot sin\left(x\right)}{\sqrt{1 - cos\left(x\right)^2}} \cdot dx = \int_0^{arcos\left(\frac{r}{r_0}\right)} -r_0 \cdot dx = -r_0 \cdot arcos\left(\frac{r}{r_0}\right) = \frac{1}{3} \cdot \kappa \cdot r_0 \cdot t$$

$$r(t) = r_0 \cdot cos\left(\frac{1}{3} \cdot \kappa \cdot t\right)$$

Da das Kollabieren auch durch die Probemassen sichtbar gemacht wird, müssen wir die Messgröße aus $r\left(t\right)$ gewinnen. Dazu setze ich an

$$V' = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r\left(t\right)^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_0^3 \cdot cos^3\left(\frac{1}{3} \cdot \kappa \cdot t\right) \tag{140}$$

einmal nach der Zeit differenziert

$$\frac{dV'}{dt} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_0^3 \cdot 3 \cdot cos^2\left(\frac{1}{3} \cdot \kappa \cdot t\right) \cdot \left(-sin\left(\frac{1}{3} \cdot \kappa \cdot t\right)\right) \cdot \frac{1}{3} \cdot \kappa$$

setzen wir Gleichung (140) ein, so folgt

$$\frac{dV'}{dt} = -V' \cdot tan\left(\frac{1}{3} \cdot \kappa \cdot t\right) \cdot \kappa \qquad \text{oder} \qquad \frac{1}{V'} \cdot \frac{dV'}{dt} = -\kappa \cdot tan\left(\frac{1}{3} \cdot \kappa \cdot t\right)$$

noch einmal nach der Zeit differenziert

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{V'} \cdot \frac{dV'}{dt}\right) = -\frac{1}{3} \cdot \kappa^2 \cdot \frac{1}{cos^2\left(\frac{1}{3} \cdot \kappa \cdot t\right)}$$

für sehr kleine Argumente $\frac{1}{3} \cdot \kappa \cdot t << 1$ können wir $\frac{1}{cos^2\left(\frac{1}{3} \cdot \kappa \cdot t\right)} \approx 1$ setzen

und erhalten $$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{V'} \cdot \frac{dV'}{dt}\right) \approx -\frac{1}{3} \cdot \kappa^2 \tag{141}$$

mit der Gleichung (119) erhalten wir dann

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{V'} \cdot \frac{dV'}{dt}\right) \approx \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt}\right)^2 \tag{142}$$

Gleichung (142) verbindet also die Kollapsstärke κ mit der Ortskoordinate $r\,(t)$ b.z.w der daraus berechnetem V' . Ich möchte dies an einem Beispiel berechnen. Eine Probemasse m möge frei kollabieren und die Ortskoordinate $r\,(t)$ wäre bestimmend für die Stärke des Kollabierens. Die Probemasse m möge zum Zeitpunkt $t = t_0$ an der Koordinate r_0, zum Zeitpunkt $t = t_1$ an der Koordinate r_1, und zum Zeitpunkt $t = t_2$ an der Koordinate r_2 sein. Die dazu gehörigen Volumina seien $V_0' = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_0^3$, $V_1' = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_1^3$ und $V_2' = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_2^3$. Dann kann man Gleichung (142) auf die Messgrößen bezogen auch folgendermaßen schreiben.

$$\frac{\frac{1}{V_1'} \cdot \frac{V_2' - V_1'}{t_2 - t_1} - \frac{1}{V_0'} \cdot \frac{V_1' - V_0'}{t_1 - t_0}}{t_2 - t_0} \approx \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{V_0} \cdot \frac{V_2 - V_0}{t_2 - t_0} \right)^2 \tag{143}$$

Kehren wir wieder zurück zu der Gleichung (137) .

$$R(t) = R_0 \cdot cos\left(\frac{1}{3} \cdot \kappa \cdot t\right) + i \cdot R_0 \cdot sin\left(\frac{1}{3} \cdot \kappa \cdot t\right)$$

Ich interpretiere $R\,(t)$ nicht nur als Radius des kollabierenden Raumes sondern auch als die erweiterte Ortskoordinate einer Probemasse m , die zum Zeitpunkt $t = 0$ mit der räumlichen Anfangsgeschwindigkeit $\frac{dr}{dt} = 0$ zum freien kollabieren ansetzt. Der Grund für die Übereinstimmung kommt daher, dass der Raum zum Zeitpunkt $t = 0$ auch keine räumliche Geschwindigkeit hat. Man beachte, dass die Winkelgeschwindigkeit $\omega_s = \frac{1}{3} \cdot \kappa \cdot t$ lediglich $\frac{1}{3}$ fache der Winkelgeschwindigkeit ist mit dem der Raum V rotiert.

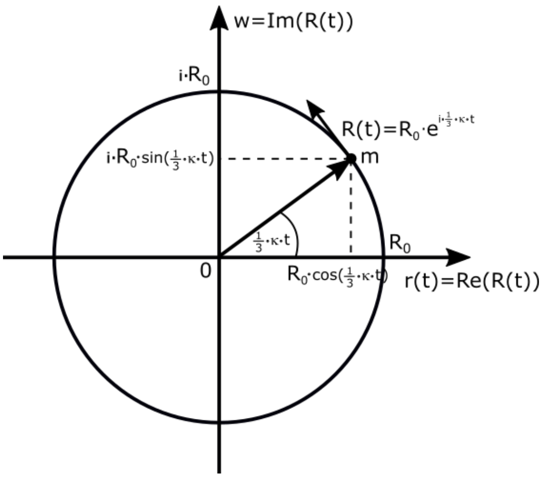


Abbildung 29

In der Abbildung **??** habe ich die waagerechte Achse mit r benannt, um den räumlichen Charakter hervorzuheben. Kartesische Koordinaten wie x oder y hätten es auch getan.

Leiten wir Gleichung (137) noch einmal nach der Zeit ab so erhalten wir

$$\frac{dR(t)}{dt} = -\frac{1}{3} \cdot \kappa \cdot R_0 \cdot sin\left(\frac{1}{3} \cdot \kappa \cdot t\right) + i \cdot \frac{1}{3} \cdot \kappa \cdot R_0 \cdot cos\left(\frac{1}{3} \cdot \kappa \cdot t\right) \tag{144}$$

Für den Betrag folgt: $|\frac{dR(t)}{dt}| = \frac{1}{3} \cdot |\kappa| \cdot R_0$ .Die Rotation erfolgt also mit konstanter Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_s = \frac{\frac{dR(t)}{dt}}{R_0} = \frac{1}{3} \cdot \kappa \tag{145}$$

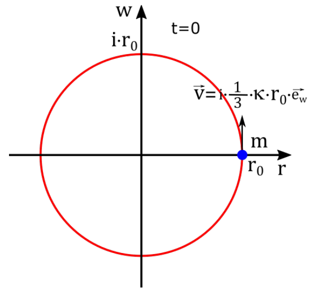


Abbildung 30

ferner gilt

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{1}{9} \cdot \kappa^2 \cdot R_0^2 = -2 \cdot \int_0^{r_0} -\frac{1}{9} \cdot \kappa^2 \cdot r \cdot dr = -2 \cdot \int_0^{r_0} a \cdot dr \tag{146}$$

ganz ähnlich folgt

$$\left(\frac{1}{3} \cdot \kappa \cdot R_0 \cdot cos\left(\frac{1}{3} \cdot \kappa \cdot t\right)\right)^2 = \frac{1}{9} \cdot \kappa^2 \cdot r\,(t)^2 = 2\int_0^r \frac{1}{9} \cdot \kappa^2 \cdot r \cdot dr = -2\int_0^r a \cdot dr \tag{147}$$

sowie

$$\left(\frac{1}{3} \cdot \kappa \cdot R_0 \cdot sin\left(\frac{1}{3} \cdot \kappa \cdot t\right)\right)^2 = \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \left(\frac{1}{3} \cdot \kappa \cdot R_0 \cdot cos\left(\frac{1}{3} \cdot \kappa \cdot t\right)\right)^2$$

$$\left(\frac{1}{3} \cdot \kappa \cdot R_0 \cdot sin\left(\frac{1}{3} \cdot \kappa \cdot t\right)\right)^2 = -2 \cdot \int_0^{r_0} a \cdot dr + 2\int_0^r a \cdot dr = -2 \cdot \int_r^{r_0} a \cdot dr \tag{148}$$

Gleichung (137) können wir auch folgendermaßen schreiben

$$\frac{dR(t)}{dt} = \frac{dr(t)}{dt} + i \cdot \frac{1}{3} \cdot \kappa \cdot R_0 \cdot cos\left(\frac{1}{3} \cdot \kappa \cdot t\right) \tag{149}$$

quadriert und mit $\frac{1}{2} \cdot m$ multipliziert ergibt die Energieerhaltung.

$$-m \cdot \int_0^{r_0} a \cdot dr = E_k - m\int_0^r a \cdot dr \quad \text{oder} \quad E_p\,(r_0) = E_k + E_p\,(r) \tag{150}$$

Die potentielle Energie der Probemasse m an der Koordinate r_0 entspricht bei dieser Darstellung der kinetischen Energie entlang der imaginären W-Achse.
Differenzieren wir Gleichung (144) nach der Zeit so folgt

$$\frac{d^2R(t)}{dt^2} = -\frac{1}{9} \cdot \kappa^2 \cdot R_0 \cdot cos\left(\frac{1}{3} \cdot \kappa \cdot t\right) - i \cdot \frac{1}{9} \cdot \kappa^2 \cdot R_0 \cdot sin\left(\frac{1}{3} \cdot \kappa \cdot t\right) \tag{151}$$

oder mit der Gleichung (139) $\quad r\left(t\right) = R_0 \cdot cos\left(\frac{1}{3} \cdot \kappa \cdot t\right)$

$$\frac{d^2R(t)}{dt^2} = -\frac{1}{9} \cdot \kappa^2 \cdot r\left(t\right) - i \cdot \frac{1}{9} \cdot \kappa^2 \cdot \sqrt{r_0^2 - r\left(t\right)^2} \tag{152}$$

Innerhalb einer Massenverteilung mit konstanter Dichte ρ gilt nach der Newtonschen Gravitationstheorie

$$\frac{d^2r(t)}{dt^2} = -\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \gamma \cdot \rho \cdot r\left(t\right) \quad \text{mit } \rho \text{ als konstanter Massendichte} \tag{153}$$

dies entspricht dem Realanteil von Gleichung (152) so das folgt

$$-\frac{1}{9} \cdot \kappa^2 \cdot r\left(t\right) = -\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \gamma \cdot \rho \cdot r\left(t\right)$$

$$\kappa^2 = 12 \cdot \pi \cdot \gamma \cdot \rho \tag{154}$$

Gleichung (154) stellt den Zusammenhang zwischen κ der angibt wie stark der Raum kollabiert und ρ als Massendichte der die Ursache des Kollabierens darstellt.

Sehen wir uns ein einfaches Beispiel an.

Sei $\rho = 10^3 \frac{kg}{m^3}$ dann folgt mit $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$

$$\kappa^2 = 12 \cdot \pi \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3} = 251,3 \cdot 10^{-8} \frac{1}{s^2} = 2.5 \cdot 10^{-6} \frac{1}{s^2}$$

$$\kappa = -1.58 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{s} = -1.58 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{m^3}{m^3 \cdot s} = -1.58 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{\left(10 \cdot dm\right)^3}{m^3 \cdot s} = -1.58 \cdot \frac{Liter}{m^3 \cdot s}$$

Man erkennt dass κ sogar bei Dichten wie die Dichte des flüssigen Wassers $\rho_{wasser} = 10^3 \frac{kg}{m^3}$ auf der Erde recht hohe Werte annimmt.

Aus der Gleichung (110) $\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt}\right) = 0 \quad$ folgt

$$-\frac{1}{V^2} \cdot \left(\frac{dV}{dt}\right)^2 + \frac{1}{V} \cdot \frac{d^2V}{dt^2} = 0 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt}\right)^2 = \frac{1}{V} \cdot \frac{d^2V}{dt^2} \tag{155}$$

Setzen wir dies mit der Gleichung (154) gleich, so folgt:

$$\frac{1}{V} \cdot \frac{d^2V}{dt^2} = \left(\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt}\right)^2 = -\kappa^2 = -12 \cdot \pi \cdot \gamma \cdot \rho = -12 \cdot \pi \cdot \gamma \cdot \frac{M_0}{V_0} \tag{156}$$

damit erhalten wir

$$\frac{d^2V}{dt^2} = -12 \cdot \pi \cdot \gamma \cdot \frac{M_0}{V_0} \cdot V \tag{157}$$

2.7 Begrenzt expandierende und kollabierende Räume

Nehmen wir an wir hätten einen Bereich V_a der homogen und mit konstanter Stärke expandiert b.z.w kollabiert. Außerhalb von V_a möge der Raum weder expandieren noch kollabieren. Wie pflanzt sich die Expansion oder das Kollabieren in V_a sich außerhalb von V_a fort?

Ich gehe wieder von der Differentialgleichung (109) aus.

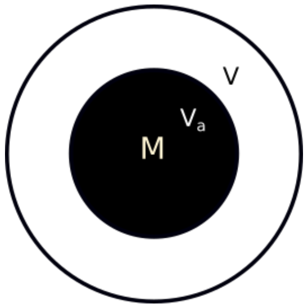


Abbildung 31

$$\frac{d^2R}{dt^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt}\right) \cdot R + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt}\right)^2 \cdot R$$

diese können wir noch bisschen umformen.

$$\frac{d^2R}{dt^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{dR}{dt} \cdot \frac{d}{dR}\left(\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt}\right) \cdot R + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt}\right)^2 \cdot R$$

setzen wir die Gleichung (108) $\quad \dfrac{dR}{dt} = \dfrac{1}{3} \cdot \left(\dfrac{1}{V} \cdot \dfrac{dV}{dt}\right) \cdot R \quad$ hier ein so folgt

$$\frac{d^2R}{dt^2} = \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt}\right) \cdot \frac{d}{dR}\left(\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt}\right) \cdot R^2 + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt}\right)^2 \cdot R$$

$$\frac{d^2R}{dt^2} = \frac{1}{18} \cdot \frac{d}{dR}\left(\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt}\right)^2 \cdot R^2 + \frac{1}{18}\left(\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt}\right)^2 \cdot 2 \cdot R \cdot \frac{dR}{dR}$$

$$\frac{d^2R}{dt^2} = \frac{1}{18} \cdot \frac{d}{dR}\left(\left(\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt}\right)^2 \cdot R^2\right) \tag{158}$$

inspiriert durch das Newtonsche Gravitationsgesetzt setze ich hier an:

$$\text{Ansatz:} \qquad \frac{d^2R}{dt^2} = \frac{1}{18} \cdot \frac{d}{dR}\left(\left(\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt}\right)^2 \cdot R^2\right) = \frac{k}{R^2} \tag{159}$$

k ist hierbei eine Konstante und ich setze

$$k = \begin{cases} -\gamma \cdot M < 0 & \text{für Gravitation und damit für kollabierende Räume} \\ \xi > 0 & \text{für expandierende Räume} \end{cases}$$

Aus 158 folgt zuerst

$$d\left(\left(\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt}\right)^2 \cdot R^2\right) = \frac{18 \cdot k}{R^2}\, dR = d\left(-\frac{18 \cdot k}{R}\right)$$

damit erhalten wir

$$\left(\frac{1}{V}\cdot\frac{dV}{dt}\right)^2\cdot R^2=-\frac{18\cdot k}{R}$$

oder $$\left(\frac{1}{V}\cdot\frac{dV}{dt}\right)^2=-\frac{18\cdot k}{R^3}=-\frac{18\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot k}{\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3}=-\frac{24\cdot\pi\cdot k}{V} \tag{160}$$

<u>Fall 1:</u> sei im Falle der kollabierenden (gravitierenden) Räume $k=-\gamma\cdot M$

$$\left(\frac{1}{V}\cdot\frac{dV}{dt}\right)^2=\frac{24\cdot\pi\cdot\gamma\cdot M}{V}\qquad\text{oder}\qquad\left(\frac{1}{V}\cdot\frac{dV}{dt}\right)=-\sqrt{\frac{24\cdot\pi\cdot\gamma\cdot M}{V}} \tag{161}$$

man beachte das Minuszeichen

oder $$\frac{1}{\sqrt{V}}\cdot\frac{dV}{dt}=-\sqrt{24\cdot\pi\cdot\gamma\cdot M}$$

$$\int_{V_0}^{V}\frac{1}{\sqrt{V}}\,dV=-\int_0^t\sqrt{24\cdot\pi\cdot\gamma\cdot M}\,dt=-\sqrt{24\cdot\pi\cdot\gamma\cdot M}\cdot t$$

$$2\cdot\left(\sqrt{V}-\sqrt{V_0}\right)=-\sqrt{24\cdot\pi\cdot\gamma\cdot M}\cdot t\quad\text{oder}\quad\sqrt{V}=\sqrt{V_0}-\sqrt{6\cdot\pi\cdot\gamma\cdot M}\cdot t$$

ergibt $$V\left(t\right)=V_0\cdot\left(1-\sqrt{\frac{6\cdot\pi\cdot\gamma\cdot M}{V_0}}\cdot t\right)^2 \tag{162}$$

Während homogen und mit konstanter Stärke kollabierenden Räume mit komplexen Funktionen beschrieben wurden, ist die Beschreibung außerhalb reell. Für den Radius R können wir schreiben

$$R\left(t\right)=R_0\cdot\left(1-\sqrt{\frac{6\cdot\pi\cdot\gamma\cdot M}{V_0}}\cdot t\right)^{\frac{2}{3}}=R_0\cdot\left(1-\sqrt{\frac{9}{2}\cdot\frac{\gamma\cdot M}{R_0^3}}\cdot t\right)^{\frac{2}{3}} \tag{163}$$

Einmal nach der Zeit differenziert

$$\frac{dR\left(t\right)}{dt}=R_0\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(1-\sqrt{\frac{9}{2}\cdot\frac{\gamma\cdot M}{R_0^3}}\cdot t\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot\left(-\sqrt{\frac{9}{2}\cdot\frac{\gamma\cdot M}{R_0^3}}\right)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = -\sqrt{\frac{2\cdot\gamma\cdot M}{R_0}}\cdot\left(1-\sqrt{\frac{9}{2}\cdot\frac{\gamma\cdot M}{R_0^3}}\cdot t\right)^{-\frac{1}{3}}$$

aus der Gleichung 163 folgt weiter $\left(1-\sqrt{\frac{9}{2}\cdot\frac{\gamma\cdot M}{R_0^3}}\cdot t\right)^{-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{R_0}{R(t)}}$

damit $\frac{dR(t)}{dt} = -\sqrt{\frac{2\cdot\gamma\cdot M}{R(t)}}$ (164)

für $t=0$ erhalten wir dann $\frac{dR(t)}{dt} = -\sqrt{\frac{2\cdot\gamma\cdot M}{R_0}}$ (165)

Das ist die Geschwindigkeit, die eine Probemasse m im Feld einer gravitierenden Masse M aus dem theoretisch Unendlichen frei fallend an der Koordinate R_0 erreichen würde. Dieses Ergebnis war zu erwarten. Denn um die Stärke des Kollabierens zu messen müssten wir im Raum Probemassen aussetzen. Diese würden das Kollabieren umso besser beschreiben, umso weiter sie von der gravitierenden Masse M entfernt sind. Probemassen die theoretisch aus dem Unendlichen mit der Anfangsgeschwindigkeit $v=0$ kommend frei fallen beschreiben also das kollabieren des Raumes.

Wir können Gleichung (162) $V(t) = V_0\cdot\left(1-\sqrt{\frac{6\cdot\pi\cdot\gamma\cdot M}{V_0}}\cdot t\right)^2$ weiter umformen.

$$V(t) = V_0\cdot e^{ln\left(1-\sqrt{\frac{6\cdot\pi\cdot\gamma\cdot M}{V_0}}\cdot t\right)^2} = V_0\cdot e^{2\cdot ln\left(1-\sqrt{\frac{6\cdot\pi\cdot\gamma\cdot M}{V_0}}\cdot t\right)} = V_0\cdot e^{2\cdot\int\limits_0^t \frac{-\sqrt{\frac{6\cdot\pi\cdot\gamma\cdot M}{V_0}}}{\left(1-\sqrt{\frac{6\cdot\pi\cdot\gamma\cdot M}{V_0}}\cdot t\right)}dt}$$

$$V(t) = V_0\cdot e^{2\cdot\int\limits_0^t \frac{-\sqrt{\frac{6\cdot\pi\cdot\gamma\cdot M}{V_0}}}{\sqrt{\frac{V(t)}{V_0}}}dt} = V_0\cdot e^{-\int\limits_0^t\sqrt{\frac{24\cdot\pi\cdot\gamma\cdot M}{V(t)}}dt} \tag{166}$$

Für das Integral können wir auch schreiben

$$\int\limits_0^t\sqrt{\frac{24\cdot\pi\cdot\gamma\cdot M}{V(t)}}dt = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\sqrt{\frac{24\cdot\pi\cdot\gamma\cdot M}{V_i(t)}}\cdot\Delta t$$

$$= \sqrt{\frac{24\cdot\pi\cdot\gamma\cdot M}{V_0(t)}}\cdot\Delta t + \sqrt{\frac{24\cdot\pi\cdot\gamma\cdot M}{V_1(t)}}\cdot\Delta t + \sqrt{\frac{24\cdot\pi\cdot\gamma\cdot M}{V_2(t)}}\cdot\Delta t + \cdots$$

$= \kappa_0 \cdot \Delta t + \kappa_1 \cdot \Delta t + \kappa_2 \cdot \Delta t + \cdots$

Das ähnelt der Gleichung (118) $V(t) = V_0 \cdot e^{i \cdot \kappa \cdot t}$ mit dem unterschied dass die Winkelgeschwindigkeit κ hier nicht konstant ist. Die Gleichung (166) kann aber nicht als eine Rotation auf der komplexen Zahlenebene dargestellt werden da zum Zeitpunkt $t = 0$ schon eine Geschwindigkeit nach der Gleichung (165) existiert. Für eine aus der Ruhelage von der Koordinate $r_a\,(t = 0) = r_0$ zum freien Fall ansetzende Probemasse m lässt sich die folgende Lösung finden.

$$r_a\,(t) = r_0 \cdot cos \left(\int_0^t \sqrt{\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r_a(t)^2 \cdot r_0 + r_a(t) \cdot r_0^2}}\, dt \right) \tag{167}$$

für die Herleitung siehe Anhang 1 . Da die homogen kollabierende Räume sich mit komplexen Zahlen beschreiben lassen vermute ich, dass Gleichung (167) der Realanteil einer umfangreicheren Gleichung ist. Daher setze ich an:

$$R_a\,(t) = R_0 \cdot cos \left(\int_0^t \sqrt{\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r_a(t)^2 \cdot r_0 + r_a(t) \cdot r_0^2}}\, dt \right) + i \cdot R_0 \cdot sin \left(\int_0^t \sqrt{\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r_a(t)^2 \cdot r_0 + r_a(t) \cdot r_0^2}}\, dt \right) \tag{168}$$

oder mit der Exponentialfunktion formuliert

$$R_a\,(t) = R_0 \cdot e^{i \cdot \int_0^t \sqrt{\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r_a(t)^2 \cdot r_0 + r_a(t) \cdot r_0^2}}\, dt} \tag{169}$$

Fall 2: sei im Falle expandierende Räume $\quad \xi = k \quad$ und $\quad \xi > 0$

$$\left(\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt}\right)^2 = -\frac{24 \cdot \pi \cdot \xi}{V} \tag{170}$$

$$\frac{1}{\sqrt{V}} \cdot \frac{dV}{dt} = \sqrt{-24 \cdot \pi \cdot \xi} \qquad \text{oder} \qquad \int_{V_0}^{V} \frac{1}{\sqrt{V}}\, dV = i \cdot \int_0^t \sqrt{24 \cdot \pi \cdot \xi}\, dt$$

$$2 \cdot \left(\sqrt{V} - \sqrt{V_0}\right) = i \cdot \sqrt{24 \cdot \pi \cdot \xi} \cdot t$$

$$\text{ergibt} \quad V(t) = V_0 \cdot \left(1 + i \cdot \sqrt{\frac{6 \cdot \pi \cdot \xi}{V_0}} \cdot t\right)^2 \tag{171}$$

für den Radius folgt

$$R(t) = R_0 \cdot \left(1 + i \cdot \sqrt{\frac{6 \cdot \pi \cdot \xi}{V_0}} \cdot t\right)^{\frac{2}{3}} = R_0 \cdot \left(1 + i \cdot \sqrt{\frac{9}{2} \cdot \frac{\xi}{R_0^3}} \cdot t\right)^{\frac{2}{3}} \tag{172}$$

Einmal nach der Zeit differenziert

$$\frac{dR(t)}{dt} = R_0 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(1 + i \cdot \sqrt{\frac{9}{2} \cdot \frac{\xi}{R_0^3}} \cdot t\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot i \cdot \sqrt{\frac{9}{2} \cdot \frac{\xi}{R_0^3}}$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = i \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \xi}{R_0}} \cdot \left(1 + i \cdot \sqrt{\frac{9}{2} \cdot \frac{\xi}{R_0^3}} \cdot t\right)^{-\frac{1}{3}}$$

aus der Gleichung 172 folgt weiter $\quad \left(1 + i \cdot \sqrt{\frac{9}{2} \cdot \frac{\xi}{R_0^3}} \cdot t\right)^{-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{R_0}{R(t)}}$

$$\text{und damit} \quad \frac{dR(t)}{dt} = i \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \xi}{R(t)}} \tag{173}$$

2.8 Begrenzt kollabierende und homogen expandierende Räume

Gegeben sei eine Masse M die sich in dem Volumen V_a befinden soll. Für den Bereich außerhalb von V_a hatten wir die Lösung nach der Gleichung (161) gefunden.

$$\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt} = -\sqrt{\frac{24 \cdot \pi \cdot \gamma \cdot M}{V}}$$

Zusätzlich soll der Raum außerhalb des Bereiches V_a homogen expandieren. Für homogen expandierende Räume hatten wir die Lösung nach der Gleichung (114) gefunden.

$$\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt} = \varepsilon$$

Gelten beide Bedingungen gleichzeitig so können wir für die Dichte ansetzen:

$$\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt} = -\sqrt{\frac{24 \cdot \pi \cdot \gamma \cdot M}{V}} + \varepsilon \tag{174}$$

$$\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt} = \left(1 - \sqrt{\frac{24 \cdot \pi \cdot \gamma \cdot M}{\varepsilon^2 \cdot V}}\right) \cdot \varepsilon \qquad \text{nach der Trennung der Variablen}$$

$$\frac{dV}{V \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{24 \cdot \pi \cdot \gamma \cdot M}{\varepsilon^2 \cdot V}}\right)} = \varepsilon \cdot dt \qquad \text{sei} \qquad V_g = \frac{24 \cdot \pi \cdot \gamma \cdot M}{\varepsilon^2}$$

Denn zu jedem $\varepsilon > 0$ lässt sich ein Volumen V_g derart finden so dass gilt:

$$\frac{24 \cdot \pi \cdot \gamma \cdot M}{V_g} = \varepsilon^2 \tag{175}$$

damit erhalten wir $$\frac{dV}{V \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{V_g}{V}}\right)} = \varepsilon \cdot dt$$

Nun gibt es zwei Fälle:
Fall 1: $V(t) < V_g$ für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\int_{V_0}^{V} \frac{dV}{V \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{V_g}{V}}\right)} = \int_0^t \varepsilon \cdot dt = \varepsilon \cdot t \quad \text{mit} \quad V(t=0) = V_0 < V_g$$

Es gilt $\quad \displaystyle\int \frac{dV}{V \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{V_g}{V}}\right)} = 2 \cdot ln\left(1 - \sqrt{\frac{V}{V_g}}\right) \quad$ da $\quad \displaystyle\sqrt{\frac{V}{V_g}} < 1 \quad$ für jedes $\quad t \in \mathbb{R}$

Damit erhalten wir

$$2 \cdot ln\left(1 - \sqrt{\frac{V}{V_g}}\right) - 2 \cdot ln\left(1 - \sqrt{\frac{V_0}{V_g}}\right) = \varepsilon \cdot t$$

$$2 \cdot ln\left(\frac{1 - \sqrt{\frac{V}{V_g}}}{1 - \sqrt{\frac{V_0}{V_g}}}\right) = \varepsilon \cdot t$$

Nach $V\left(t\right)$ aufgelöst ergibt

$$V\left(t\right) = V_g \cdot \left(1 - \left(1 - \sqrt{\frac{V_0}{V_g}}\right) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot t}\right)^2 = V_0 \cdot \left(\sqrt{\frac{V_g}{V_0}} \cdot \left(1 - \left(1 - \sqrt{\frac{V_0}{V_g}}\right) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot t}\right)\right)^2$$

oder $\quad V\left(t\right) = V_0 \cdot \left(\sqrt{\frac{V_g}{V_0}} + \left(1 - \sqrt{\frac{V_g}{V_0}}\right) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot t}\right)^2 \quad$ für $\quad V\left(t\right) \leq V_0 < V_g \qquad (176)$

gehen wir zur $R\left(t\right)$ über so erhalten wir

$$R\left(t\right) = R_0 \cdot \left(\sqrt{\frac{V_g}{V_0}} + \left(1 - \sqrt{\frac{V_g}{V_0}}\right) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot t}\right)^{\frac{2}{3}} \qquad (177)$$

leiten wir einmal nach der Zeit ab

$$\frac{dR}{dt} = \frac{1}{3} \cdot \varepsilon \cdot R_0 \cdot \left(\sqrt{\frac{V_g}{V_0}} + \left(1 - \sqrt{\frac{V_g}{V_0}}\right) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot t}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{V_g}{V_0}}\right) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot t}$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{1}{3} \cdot \varepsilon \cdot R_0 \cdot \frac{\left(1 - \sqrt{\frac{V_g}{V_0}}\right) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot t}}{\left(\sqrt{\frac{V_g}{V_0}} + \left(1 - \sqrt{\frac{V_g}{V_0}}\right) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot t}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

mit $\left(\sqrt{\frac{V_g}{V_0}}+\left(1-\sqrt{\frac{V_g}{V_0}}\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot\varepsilon\cdot t}\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{R}{R_0}}$

und $\left(1-\sqrt{\frac{V_g}{V_0}}\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot\varepsilon\cdot t}=\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{V_g}{V_0}}$

$$\frac{dR}{dt}=\frac{1}{3}\cdot\varepsilon\cdot R_0\cdot\frac{\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{V_g}{V_0}}}{\sqrt{\frac{R}{R_0}}}=\frac{1}{3}\cdot\varepsilon\cdot R-\sqrt{\frac{2\cdot\gamma\cdot M}{R}}$$

Differenzieren wir noch einmal nach der Zeit so erhalten wir

$$\frac{dR^2}{dt^2}=\frac{1}{9}\cdot\varepsilon^2\cdot R-\frac{1}{6}\cdot\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{2\cdot\gamma\cdot M}{R}}-\frac{\gamma\cdot M}{R^2}\quad\text{mit}\quad R<R_g=\left(\frac{18\cdot\gamma\cdot M}{\varepsilon^2}\right)^{\frac{1}{3}}\tag{178}$$

Wir sehen das wir neben dem newtonschen Term $-\frac{\gamma\cdot M}{R^2}$

noch einen zweiten anziehenden Term haben $-\frac{1}{6}\cdot\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{2\cdot\gamma\cdot M}{R}}$ (179)

__**Fall 2:**__ $V(t)>V_g$ für alle $t\in\mathbb{R}$

$$\int_{V_0}^{V}\frac{dV}{V\cdot\left(1-\sqrt{\frac{V_g}{V}}\right)}=\int_0^t\varepsilon\cdot dt=\varepsilon\cdot t\quad\text{mit}\quad V(t=0)=V_0>V_g$$

Es gilt $\int\frac{dV}{V\cdot\left(1-\sqrt{\frac{V_g}{V}}\right)}=2\cdot ln\left(\sqrt{\frac{V}{V_g}}-1\right)$ da $\sqrt{\frac{V}{V_g}}>1$ für jedes $t\in\mathbb{R}$

Damit erhalten wir

$$2\cdot ln\left(\sqrt{\frac{V}{V_g}}-1\right)-2\cdot ln\left(\sqrt{\frac{V_0}{V_g}}-1\right)=\varepsilon\cdot t$$

$$2\cdot ln\left(\frac{\sqrt{\frac{V}{V_g}}-1}{\sqrt{\frac{V_0}{V_g}}-1}\right)=\varepsilon\cdot t$$

Nach $V(t)$ aufgelöst ergibt

$$V(t) = V_g \cdot \left(1 + \left(\sqrt{\frac{V_0}{V_g}} - 1\right) \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot\varepsilon\cdot t}\right)^2 = V_0 \cdot \left(\sqrt{\frac{V_g}{V_0}} \cdot \left(1 + \left(\sqrt{\frac{V_0}{V_g}} - 1\right) \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot\varepsilon\cdot t}\right)\right)^2$$

$$\text{oder} \qquad V(t) = V_0 \cdot \left(\sqrt{\frac{V_g}{V_0}} + \left(1 - \sqrt{\frac{V_g}{V_0}}\right) \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot\varepsilon\cdot t}\right)^2 \qquad \text{für} \quad V_g < V_0 \leq V(t) \qquad (180)$$

Da Gleichung (180) bis auf den Gültigkeitsbereich identisch ist mit der Gleichung (176) stimmen die restlichen Schlußfolgerungen überein.

3 Expandierende und Kollabierende Räume Relativistisch

3.1 Überführung des Translationsfeldes

Jetzt wollen wir uns ansehen wie sich das Translationsfeld in Expandierenden und Kollabierenden Räumen ändert. Wir betrachten ein Inertialsystem S, welches zum Zeitpunkt $t = 0$ das momentane Ruhesystem eines geradlinig gleichförmig Beschleunigten Bezugssystems ist, welches sich in die Richtung der positiven X-Achse bewegt. In S ruhen dann zum Zeitpunkt $t = 0$ alle Raketen, und in S gilt die Beziehung

$$a(x) = \frac{c^2}{x}$$

ohne die vektorielle Schreibweise, da sich die Richtung der Beschleunigung nicht ändert. Einmal differenziert

$$da = -\frac{c^2}{x^2} \cdot dx = -\frac{c^4}{x^2} \cdot \frac{1}{c^2} \cdot dx = -\frac{a^2}{c^2} \cdot dx \tag{181}$$

Gleichung (181) enthält nur noch lokale Größen und die Anwesenheit eines globalen Inertialsystems S ist nicht mehr erforderlich. Sie beschreibt die Änderung der Beschleunigung in einem hinreichend kleinen Raumbereich. Daher denke ich das Inertialsystem S zu einem lokalen Inertialsystem S zusammengeschrumpft.

Lassen wir jetzt das Universum mit der Stärke ε expandieren, bzw. mit der Stärke κ kollabieren. Die dabei zusätzlich auftretenden Beschleunigungen berücksichtige ich in der Form

$$da = \frac{1}{9} \cdot \varepsilon^2 \cdot dx \quad \text{für Expandierende Räume} \tag{182}$$

$$da = -\frac{1}{9} \cdot \kappa^2 \cdot dx \quad \text{für Kollabierende Räume} \tag{183}$$

Diese zusätzlich hinzukommenden Beschleunigungen werden nun die Stabilität des Translationsfeldes stören. Um jenes Translationsfeld zu erhalten welches in Expandierenden und Kollabierenden Räumen stabil ist muss ich dem Translationsfeld der Speziellen Relativitätstheorie, die entgegengesetzten Beträge hinzu addieren. So erhalten wir

$$da = -\frac{a^2}{c^2} \cdot dx - \frac{1}{9} \cdot \varepsilon^2 \cdot dx = -\left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{\varepsilon^2}{9}\right) \cdot dx \quad \text{für nur Expandierende Räume} \tag{184}$$

$$da = -\frac{a^2}{c^2} \cdot dx + \frac{1}{9} \cdot \kappa^2 \cdot dx = -\left(\frac{a^2}{c^2} - \frac{\kappa^2}{9}\right) \cdot dx \quad \text{für nur Kollabierende Räume} \tag{185}$$

Zuerst lösen wir Gleichung (184)

$$da = -\left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{\varepsilon^2}{9}\right) \cdot dx \quad \text{oder} \quad \frac{da}{1 + \dfrac{9 \cdot a^2}{\varepsilon^2 \cdot c^2}} = -\frac{1}{9} \cdot \varepsilon^2 \cdot dx$$

Oder integriert

$$\int_{\infty}^{a} \frac{da}{1 + \dfrac{9 \cdot a^2}{\varepsilon^2 \cdot c^2}} = -\int_0^x \frac{1}{9} \cdot \varepsilon^2 \cdot dx$$

$$\frac{1}{3} \cdot c \cdot \varepsilon \left(arctan\left(\frac{3 \cdot a}{c \cdot \varepsilon}\right) - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{9} \cdot \varepsilon^2 \cdot x \quad \text{oder} \quad arctan\left(\frac{3 \cdot a}{c \cdot \varepsilon}\right) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{\varepsilon}{c} \cdot x + \frac{\pi}{2}$$

$$a(x) = \frac{1}{3} \cdot c \cdot \varepsilon \cdot tan\left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{\varepsilon}{c} \cdot x + \frac{\pi}{2}\right) \tag{186}$$

für $x = x_0$ sei $-\frac{1}{3} \cdot \frac{\varepsilon}{c} \cdot x_0 + \frac{\pi}{2} = 0$ oder $x_0 = 3 \cdot \frac{c}{\varepsilon} \cdot \frac{\pi}{2}$

mit der Substitution: $x = x_0 + x'$ folgt

$$a(x) = \frac{1}{3} \cdot c \cdot \varepsilon \cdot tan\left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{\varepsilon}{c} \cdot (x_0 + x') + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{3} \cdot c \cdot \varepsilon \cdot tan\left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{\varepsilon}{c} \cdot x'\right)$$

und wieder mit x anstatt x'

$$a(x) = -\frac{1}{3} \cdot c \cdot \varepsilon \cdot tan\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\varepsilon}{c} \cdot x\right) \tag{187}$$

Damit haben wir die Beschleunigung der Raketen erfasst. Das Feld hat das umgekehrte Vorzeichen. Für das Translationsfeld in homogen und mit konstanter Stärke expandierenden Räumen gilt also

$$a(r) = \frac{1}{3} \cdot c \cdot \varepsilon \cdot tan\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\varepsilon}{c} \cdot r\right) \tag{188}$$

Ich habe r anstatt x benutzt, da vom Nullpunkt ausgesehen, alle Raumrichtungen gleichberechtigt sind.

Jetzt lösen wir die Gleichung (185)

$$da = -\left(\frac{a^2}{c^2} - \frac{\kappa^2}{9}\right) \cdot dx \quad \text{oder} \quad \frac{da}{\left(1 - \frac{9 \cdot a^2}{\kappa^2 \cdot c^2}\right)} = \frac{1}{9} \cdot \kappa^2 \cdot dx$$

$$\frac{da}{\left(1 - \frac{9 \cdot a^2}{\kappa^2 \cdot c^2}\right)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot da}{\left(1 - \frac{3 \cdot a}{\kappa \cdot c}\right)} + \frac{\frac{1}{2} \cdot da}{\left(1 + \frac{3 \cdot a}{\kappa \cdot c}\right)} = \frac{1}{9} \cdot \kappa^2 \cdot dx$$

$$\int \frac{\frac{1}{2} \cdot da}{\left(1 - \frac{3 \cdot a}{\kappa \cdot c}\right)} + \int \frac{\frac{1}{2} \cdot da}{\left(1 + \frac{3 \cdot a}{\kappa \cdot c}\right)} = \int \frac{1}{9} \cdot \kappa^2 \cdot dx$$

Da $\kappa < 0$ ist schreibe ich $\kappa = -|\kappa|$ ferner gilt $0 \leq a$ damit $0 \leq \frac{3 \cdot a}{|\kappa| \cdot c}$

$$\int \frac{\frac{1}{2} \cdot da}{\left(1 - \frac{3 \cdot a}{|\kappa| \cdot c}\right)} + \int \frac{\frac{1}{2} \cdot da}{\left(1 + \frac{3 \cdot a}{|\kappa| \cdot c}\right)} = \int \frac{1}{9} \cdot \kappa^2 \cdot dx$$

für das zweite Integral gilt:

$$\int \frac{\frac{1}{2} \cdot da}{\left(1 + \frac{3 \cdot a}{|\kappa| \cdot c}\right)} = \frac{1}{6} \cdot c \cdot |\kappa| \cdot ln\left(1 + \frac{3 \cdot a}{|\kappa| \cdot c}\right) + C$$

für das erste Integral $\displaystyle\int \frac{\frac{1}{2} \cdot da}{\left(1 - \frac{3 \cdot a}{|\kappa| \cdot c}\right)} = \int \frac{1}{9} \cdot \kappa^2 \cdot dx$

machen wir zwei Fallunterscheidungen

1.Fall: $\quad 0 < 1 - \frac{3 \cdot a}{|\kappa| \cdot c} \quad$ oder $\quad 0 \leq a < \frac{1}{3} \cdot c \cdot |\kappa|$

Dadurch können wir die Integrationsgrenzen folgendermaßen setzen:

$$\int_0^a \frac{\frac{1}{2} \cdot da}{\left(1 - \frac{3 \cdot a}{|\kappa| \cdot c}\right)} + \int_0^a \frac{\frac{1}{2} \cdot da}{\left(1 + \frac{3 \cdot a}{|\kappa| \cdot c}\right)} = \int_0^x \frac{1}{9} \cdot \kappa^2 \cdot dx = \frac{1}{9} \cdot \kappa^2 \cdot x$$

$$-\frac{1}{6} \cdot c \cdot |\kappa| \cdot ln\left(1 - \frac{3 \cdot a}{|\kappa| \cdot c}\right) + \frac{1}{6} \cdot c \cdot |\kappa| \cdot ln\left(1 + \frac{3 \cdot a}{|\kappa| \cdot c}\right) = \frac{1}{9} \cdot \kappa^2 \cdot x$$

$$a(x) = \frac{1}{3} \cdot |\kappa| \cdot c \cdot \frac{e^{\frac{2}{3} \cdot \frac{|\kappa|}{c} \cdot x} - 1}{e^{\frac{2}{3} \cdot \frac{|\kappa|}{c} \cdot x} + 1} = \frac{1}{3} \cdot \kappa \cdot c \cdot \frac{e^{\frac{2}{3} \cdot \frac{\kappa}{c} \cdot x} - 1}{e^{\frac{2}{3} \cdot \frac{\kappa}{c} \cdot x} + 1}$$

$$a(x) = \frac{1}{3} \cdot \kappa \cdot c \cdot tanh\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\kappa}{c} \cdot x\right)$$

Da für $x = 0 \quad a = 0$ ist spielt die Richtung keine Rolle und wir haben hier eine Kugelsymmetrie. Deswegen schreibe ich r anstatt x. Berücksichtigen wir noch dass das Feld das umgekehrte Vorzeichen hat so erhalten wir

$$a(r) = -\frac{1}{3} \cdot \kappa \cdot c \cdot tanh\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\kappa}{c} \cdot r\right) \tag{189}$$

2.Fall: $\quad 0 > 1 - \frac{3 \cdot a}{|\kappa| \cdot c}$ oder $\frac{1}{3} \cdot c \cdot |\kappa| < a$

Für die Grenzen können wir dann setzen

$$\int_\infty^a \frac{\frac{1}{2} \cdot da}{\left(1 - \frac{3 \cdot a}{|\kappa| \cdot c}\right)} + \int_\infty^a \frac{\frac{1}{2} \cdot da}{\left(1 + \frac{3 \cdot a}{|\kappa| \cdot c}\right)} = \int_0^x \frac{1}{9} \cdot \kappa^2 \cdot dx = \frac{1}{9} \cdot \kappa^2 \cdot x$$

$$-\int_\infty^a \frac{\frac{1}{2} \cdot da}{\left(\frac{3 \cdot a}{|\kappa| \cdot c} - 1\right)} + \int_\infty^a \frac{\frac{1}{2} \cdot da}{\left(\frac{3 \cdot a}{|\kappa| \cdot c} + 1\right)} = \frac{1}{9} \cdot \kappa^2 \cdot x$$

$$-\frac{1}{6} \cdot c \cdot |\kappa| \cdot ln\left(\frac{3 \cdot a}{|\kappa| \cdot c} - 1\right) + \lim_{a \to \infty} \frac{1}{6} \cdot c \cdot |\kappa| \cdot ln\left(\frac{3 \cdot a}{|\kappa| \cdot c} - 1\right) +$$

$$+\frac{1}{6} \cdot c \cdot |\kappa| \cdot ln\left(\frac{3 \cdot a}{|\kappa| \cdot c} + 1\right) - \lim_{a \to \infty} \frac{1}{6} \cdot c \cdot |\kappa| \cdot ln\left(\frac{3 \cdot a}{|\kappa| \cdot c} + 1\right) = \frac{1}{9} \cdot \kappa^2 \cdot x$$

$$\frac{1}{6}\cdot c\cdot|\kappa|\cdot ln\left(\frac{\frac{3\cdot a}{|\kappa|\cdot c}+1}{\frac{3\cdot a}{|\kappa|\cdot c}-1}\right)+\lim_{a\to\infty}\frac{1}{6}\cdot c\cdot|\kappa|\cdot ln\left(\frac{\frac{3\cdot a}{|\kappa|\cdot c}-1}{\frac{3\cdot a}{|\kappa|\cdot c}+1}\right)=\frac{1}{9}\cdot\kappa^2\cdot x$$

$$\frac{1}{6}\cdot c\cdot|\kappa|\cdot ln\left(\frac{\frac{3\cdot a}{|\kappa|\cdot c}+1}{\frac{3\cdot a}{|\kappa|\cdot c}-1}\right)=\frac{1}{9}\cdot\kappa^2\cdot x \quad \text{oder} \quad a\left(x\right)=\frac{1}{3}\cdot c\cdot|\kappa|\cdot\frac{e^{\frac{2}{3}\cdot\frac{|\kappa|}{c}\cdot x}+1}{e^{\frac{2}{3}\cdot\frac{|\kappa|}{c}\cdot x}-1}$$

$$a\left(x\right)=-\frac{1}{3}\cdot c\cdot\kappa\cdot\frac{e^{-\frac{2}{3}\cdot\frac{\kappa}{c}\cdot x}+1}{e^{-\frac{2}{3}\cdot\frac{\kappa}{c}\cdot x}-1}=-\frac{1}{3}\cdot c\cdot\kappa\cdot\frac{1+e^{\frac{2}{3}\cdot\frac{\kappa}{c}\cdot x}}{1-e^{\frac{2}{3}\cdot\frac{\kappa}{c}\cdot x}}=\frac{1}{3}\cdot c\cdot\kappa\cdot\frac{e^{\frac{2}{3}\cdot\frac{\kappa}{c}\cdot x}+1}{e^{\frac{2}{3}\cdot\frac{\kappa}{c}\cdot x}-1}$$

$$a\left(x\right)=\frac{1}{3}\cdot c\cdot\kappa\cdot coth\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\kappa}{c}\cdot x\right)$$

Das Feld erhalten wir wieder durch die Multiplikation mit minus eins.

$$a\left(x\right)=-\frac{1}{3}\cdot c\cdot\kappa\cdot coth\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\kappa}{c}\cdot x\right) \tag{190}$$

Wie das Translationsfeld der SRT haben wir hier keine Kugelsymmetrie daher benutzen wir x anstatt r.

4 Das äußere Gravitationsfeld

4.1 Die neue Sicht auf die Gravitation

Nach dem Konzept der Expandierenden und Kollabierenden Räume, kollabiert der Raum z.B. um einer kugelförmigen Masse M wie die Sonne.

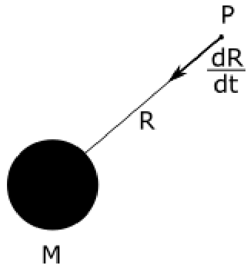


Abbildung 32

Um dieses Kollabieren sichtbar zu machen, müssten wir nun im Raum Probemassen aussetzen. Da der Raum bei einer Entfernung R vom Mittelpunkt der Masse M, eine Geschwindigkeit $\frac{dR}{dt}$ hat, müssen wir die Probemassen sehr weit von der gravitierenden Masse M aussetzen. Im ideal Fall lassen wir R ins Unendliche gehen. Probemassen die im ideal Fall aus dem Unendlichen kommend frei fallen, haben wenn wir in guter Näherung $a = -\frac{\gamma \cdot M}{R^2}$ voraussetzen, an der Koordinate R die Geschwindigkeit $v = -\sqrt{\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{R}}$. Das ist gleichzeitig annähernd die Geschwindigkeit mit der, der Raum kollabiert. Es gilt also

$$\frac{dR}{dt} = -\sqrt{\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{R}} \tag{191}$$

Dadurch wird das Gravitationsfeld auch zu einem Geschwindigkeitsfeld. Wir können zu jedem Punkt des Raumes außerhalb der gravitierenden Masse M nicht nur eine Beschleunigung nach Newton sondern auch eine Geschwindigkeit wie oben zuordnen.

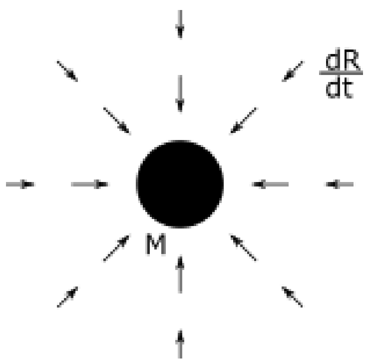


Abbildung 33

Beobachter die in einem solchen Gravitationsfeld stationär sein wollen, müssen also eine Geschwindigkeit $u = -\frac{dR}{dt}$ sowie eine Beschleunigung nach Newton $a = \frac{\gamma \cdot M}{R}$ haben. Damit sind stationäre Beobachter nicht nur beschleunigt sondern haben auch eine Geschwindigkeit. Diese Geschwindigkeit führt gemäß der SRT zu relativistischen Effekten der Zeitdilatation sowie zur Lorentzkontraktion. Ein mit der Geschwindigkeit $\frac{dR}{dt}$ frei fallende Beobachter sieht also die Maßstäbe des stationären Bezugssystems lorentzkontrahiert, während die Uhren eine Zeitdilatation erfahren. Die Anwendung der SRT über diesen Beobachter ist nicht neu, aber im Rahmen der Expandierenden und Kollabierenden Räumen wird die Position dieses Beobachters verstärkt. Dieser Beobachter fällt nicht einfach im Gravitationsfeld frei, sondern folgt dem Kollabieren des Raumes.

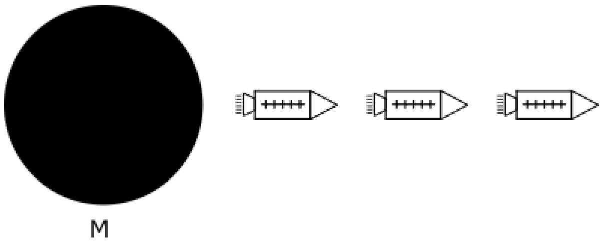


Abbildung 34

Um das besser hervorzuheben stellen wir uns folgendes vor. Im Zentrum der gravitierenden Masse M soll sich eine einfache Lichtquelle befinden. Während der frei fallender Beobachter an den Raketen des stationären Bezugssystems vorbei kommt, soll eine Macht, sagen wir z.B. Gott die gravitierende Masse M zum verschwinden bringen. Dann wird in kürzeste Zeit $\frac{dR}{dt}$ zum erliegen kommen und der frei fallende Beobachter würde relativ zu der Lichtquelle im Zentrum der verschwundenen gravitierenden Masse M ruhen. Dann aber wird das stationäre Bezugssystem mit der schon immer vorhandenen aber bis dato unsichtbaren Geschwindigkeit davon fliegen.

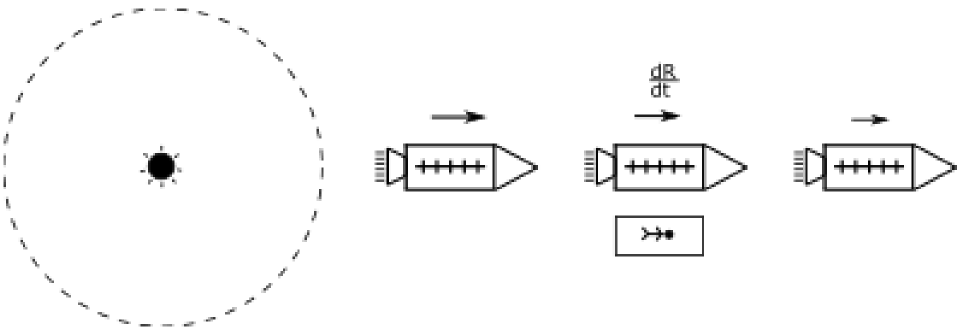


Abbildung 35

Von diesem Standpunkt ausgesehen ist das stationäre Bezugssystem eine abgewandelte Form des Translationsfeldes. Die Allgemeine Relativitätstheorie Einsteins entspricht der Physik des stationären Bezugssystems. Um die Allgemeine Relativitätstheorie besser zu deuten sehen wir uns das Translationsfeld nochmal an. Stellen wir uns vor wir würden unser Leben in mit konstant und gleichmäßig beschleunigten Raketen verbringen. Wir würden unter uns eine Flächensingularität sehen, die ein Kraftfeld gemäß der Gleichung $a = -\frac{c^2}{x}$ generiert. Weiter würden wir feststellen dass Lichtstrahlen stets Kreisbahnen beschreiben. Physiker würden diesem Kraftfeld einen Namen geben und eine Theorie erstellen die das verhalten von Licht und Materie in diesem Feld beschreibt. Allerdings gibt es auch das globale Inertialsystem welches kein Feld sondern eine beschleunigte Bewegung von Raketen sieht. Das globale Inertialsystem beschreibt alles mit Hilfe der Speziellen Relativitätstheorie. Es gilt also eine neue spezielle Relativitätstheorie für kollabierende Räume zu finden. Man beachte aber, egal wie diese neue Theorie ausfällt, die Allgemeine Relativitätstheorie wird nicht nur weiterhin bestand haben, sie wird sogar notwendig sein. Denn sie beschreibt die Physik dieses Bezugssystems und ist somit für die vollständige Beschreibung der Physik unerlässlich. Genauso kann man eine Theorie für das Translationsfeld erfinden die dann gültig wäre, unabhängig davon wie dominant die Spezielle Relativitätstheorie letztendlich ist.

5 Die 5. Wechselwirkung

5.1 Das Experiment zur 5. Wechselwirkung

Aus den obigen Betrachtungen geht zwar die Existenz einer 5.Wechselwirkung hervor die als Partner der Gravitation zu verstehen ist, aber nicht wo und wie sie zu finden ist. Beschäftigt man sich aber lange genug mit diesem Stoff so bekommt man ein Gefühl dafür wo man nachschauen muss. Letztendlich muss die 5. Wechselwirkung natürlich Experimentell erschlossen werden. Die folgenden Überlegungen dienen dazu eine experimentelle Anordnung zu finden die die besten Aussichten auf Erfolg verspricht. Letztendlich handelt es sich hier um Spekulationen wenn auch mit hoher Wahrscheinlichkeit auf Erfolg.

Sehen wir uns die nächste Abbildung an. Da Gravitation eine Wechselwirkung der Raumzeit mit Materie ist, sollte auch die 5.Wechselwirkung eine Wechselwirkung mit der Raumzeit sein. Ferner sollte die 5.Wechselwirkung in der Expansion des Universums stecken und die Quelle der 5. Wechselwirkung überall im Universum zu finden sein. Licht erfüllt die nötigen Anforderungen, da sie einerseits überall im Universum zu finden ist und in Form von Hintergrundstrahlung sogar hinter der Expansion stecken kann. Ferner ist es grundverschieden von Materie.

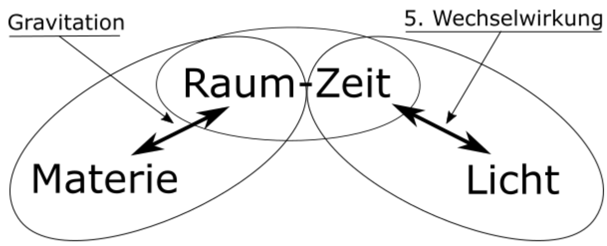


Abbildung 36

Daher vermute ich die folgenden Zusammenhänge die man dem obigen Bild entnehmen kann. Gravitation ist in erster Linie die Wechselwirkung der Materie mit dem Raum, wobei der Raum kollabiert. Die Einheit der Raumzeit zwingt die Zeit dann dazu langsamer zu vergehen. Bei der 5.Wechselwirkung soll das Licht in erster Linie mit der Zeit wechselwirken und den Zeitablauf beschleunigen, wonach dann die Einheit der Raumzeit den Raum zwingen wird zu expandieren. Das eine Veränderung des Zeitablaufs zu einer beschleunigten Bewegung führt folgt ja unmittelbar aus der Gleichung 102

$$a_0'' = -c^2 \cdot \frac{1}{\Delta\tau_0} \cdot \frac{d\tau_0}{dx''}$$

Wenn die obige Vermutung der 5.Wechselwirkung als Licht-Raumzeit-Wechselwirkung sich als wahr herausstellen sollte, dann sollten Lichtkonzentrationen zu Beschleunigungen führen. Da Licht aber sehr flüchtig ist, brauchen wir Spiegeln um Licht lokal einzusperren. In der nächsten Abbildung sieht man die Grund Idee, wie so etwas gehen könnte.

Ein torusförmiges Gefäß aus Glas (oder Metall) mit reflektierenden Oberflächen wird durch eine Öffnung mit Photonen ausgewählte Wellenlänge (mit Licht oder Mikrowellen) "gefüllt".

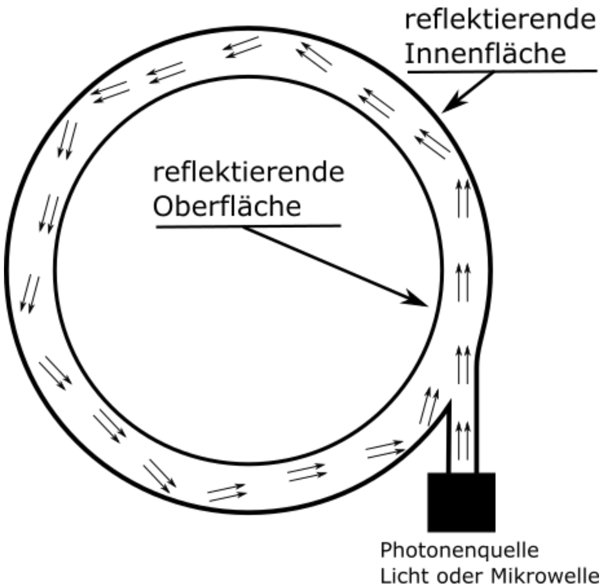


Abbildung 37

Ein mechanischer Fadenpendel der an dieser Konstruktion vorbeikommt, könnte entstehende Beschleunigungen sichtbar machen.

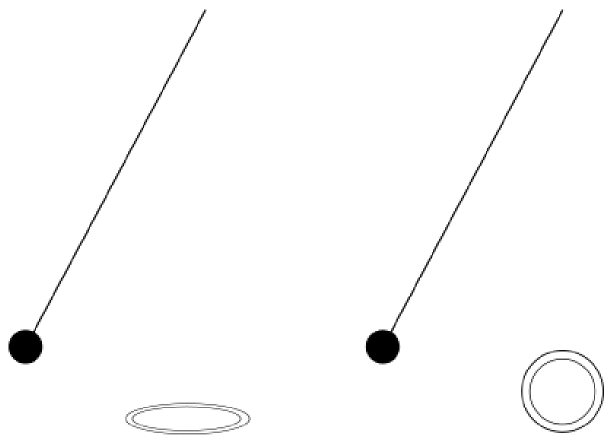


Abbildung 38

Die Photonenquelle sollte eine Leistung von der Größenordnung von 1000 Watt haben. Eine Kühlung wird zuerst nicht notwendig da man die Lichtquelle ständig ein und ausschalten kann. Der Pendel wird falls eine Wirkung von der Anordnung ausgeht diese aufsummieren und sichtbar machen.

5.2 Abschätzung über die Expansion des Universums

Für kollabierende Räume hatten wir

$$\kappa = \sqrt{\frac{24 \cdot \pi \cdot \gamma \cdot M}{V_0}} = \sqrt{\frac{24 \cdot \pi \cdot \gamma \cdot M \cdot c^2}{c^2 \cdot V_0}} = \sqrt{\frac{24 \cdot \pi \cdot \gamma \cdot E_{ruhe}}{c^2 \cdot V_0}}$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{24 \cdot \pi \cdot \gamma}{c^2} \cdot \rho_{ruhe}} \quad \text{gefunden.}$$

Für die 5. Wechselwirkung setze ich symmetrisch an.

$$\varepsilon = \sqrt{k \cdot \rho_{Strahlung}} \tag{192}$$

Der Ansatz ist also, dass die Erregung der Expansion von der Dichte der elektromagnetischen Strahlung herrührt. k ist hierbei eine noch zu bestimmende Konstante. Insbesondere folgt aus diesem Ansatz für die Expansion des Universums

$$\varepsilon_u = \sqrt{k \cdot \rho_H} \qquad \text{dabei ist } \rho_H \text{ die Energiedichte der Hintergrundstrahlung} \tag{193}$$

Für die homogen expandierende Räume gilt: $\frac{dR}{dt} = \frac{1}{3} \cdot \varepsilon \cdot R$

Für die Hubble-Beziehung gilt $\quad v = H \cdot R$

Setzen wir die beiden Gleichungen gleich so erhalten wir für die Expansion des Universums

$$\varepsilon_u = 3 \cdot H \tag{194}$$

oben eingesetzt und nach der Konstanten k aufgelöst ergibt:

$$k = \frac{9 \cdot H^2}{\rho_H} \tag{195}$$

setzen wir $\quad H = 70 \cdot \frac{km}{s \cdot Mpc} = 70 \cdot \frac{1000 \cdot m}{s \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^{16} \cdot m} \approx 2.3 \cdot 10^{-18} \cdot s^{-1}$

$$\text{Damit folgt} \quad \varepsilon_u \approx 7 \cdot 10^{-18} \cdot s^{-1} \tag{196}$$

Die kosmische Hintergrundstrahlung hat eine Photonendichte von etwa $410 \cdot \frac{Photonon}{cm^3}$. Rechnen wir mit der Wellenlänge $\lambda = 1mm$ erhalten wir für einzelnes Photon die Energie

$$E = h \cdot \nu = \frac{h \cdot c}{\lambda} = \frac{6.6 \cdot 10^{-34} \cdot Js \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot \frac{m}{s}}{1 \cdot 10^{-3} \cdot m} \approx 2 \cdot 10^{-22} \frac{J}{Photon}$$

Für die Energiedichte der kosmischen Hintergrundstrahlung erhalten wir dann etwa

$$\rho_H \approx 410 \cdot \frac{Photonen}{cm^3} \cdot 2 \cdot 10^{-22} \frac{J}{Photon} \approx 8.2 \cdot 10^{-14} \cdot \frac{J}{m^3}$$

Damit erhalten wir für die Konstante k

$$k \approx \frac{9 \cdot (2.3 \cdot 10^{-18} \cdot s^{-1})^2}{8.2 \cdot 10^{-14} \cdot \frac{J}{m^3}} \approx 5.8 \cdot 10^{-22} \cdot \frac{m^3}{s^2 \cdot J} \tag{197}$$

Aus dem Ansatz Elektromagnetische Strahlung wäre die Quelle der 5. Wechselwirkung, folgt ja, dass die Sterne außer der Schwerkraft auch Zentren der 5.Wechselwirkung sind. Um diese Kraft abzuschätzen gehe ich von folgendem Modell aus. Betrachten wir einen Stern mit der Strahlungsleistung L . Innerhalb des Zeitintervalls Δt verlässt dann die Oberfläche des Sternes die Energie $E = L \cdot \Delta t$. Da sich die Strahlung mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet, erreicht sie in diesem Zeitintervall den Radius $R = c \cdot \Delta t$. Für die Expansionsdichte setze ich wieder an

$$\varepsilon_s = \sqrt{k \cdot \rho_H} = \sqrt{k \cdot \frac{E}{V}} = \sqrt{k \cdot \frac{L \cdot \Delta t}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3}} = \sqrt{k \cdot \frac{L \cdot R}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \cdot c}}$$

$$\varepsilon_s = \sqrt{\frac{3 \cdot k \cdot L}{4 \cdot \pi \cdot c}} \cdot \frac{1}{R} \tag{198}$$

Beziehen wir uns auf die Sonne, so folgt mit der Sonnenleuchtkraft $L = 3.8 \cdot 10^{26} \cdot W$

$$\varepsilon_{Sonne} \approx 1.3 \cdot 10^{-2} \frac{m}{s} \cdot \frac{1}{R} \tag{199}$$

Die Expansionsdichte ε_{Sonne} sinkt auf die Größe ε_u bei dem Abstand

$$\varepsilon_{Sonne} = \varepsilon_u \quad \text{bei dem Abstand} \quad R = \frac{1.3 \cdot 10^{-2}}{7 \cdot 10^{-18} \cdot s^{-1}} \cdot \frac{m}{s} = 1.9 \cdot 10^{15} m$$

Die durch die Sonnenstrahlung verursachte Expansion des Raumes ist also innerhalb des Sonnensystems größer als die großräumige Expansion des Universums. Setzen wir dies in die Gleichung (178) ein und benutzen $\xi = 1.3 \cdot 10^{-2} \frac{m}{s}$

$$\frac{dR^2}{dt^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{\xi^2}{R} - \frac{1}{6} \cdot \xi \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{R^3}} - \frac{\gamma \cdot M}{R^2} \qquad \text{mit} \qquad R_0 < \left(\frac{18 \cdot \gamma \cdot M}{\varepsilon^2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

6 Interstellare Reisen

Um vernünftig interstellar Reisen zu können bedarf es der Manipulation der Zeitgeschwindigkeit. Es muß erreicht werden,dass die Zeit in einem begrenzten Bereich schneller vergeht als in der übrigen Welt.

7 Anhang

7.1 Anhang 1

Die speziellen Lorentz-Transformationen und ihre Ableitungen :

Gegeben seien zwei Inertialsysteme S und S',die zueinander Achsenparallel sind.S' möge sich relativ zu S in die Richtung der positiven X-Achse mit der konstanten Geschwindigkeit v bewegen.Dann gelten zwischen S und S' die speziellen Lorentz-Transformationsgleichungen

$$x=\frac{x'+v\cdot t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad , \quad y=y' \quad , \quad z=z' \quad , \quad t=\frac{t'+\frac{v}{c^2}\cdot x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \textbf{(G1)}$$

Dabei fallen für t=t'=0 die Ursprünge von S und S' zusammen. Durch das einmalige differenzieren nach der Zeit erhalten wir die Geschwindigkeitstransformationen

$$u_x=\frac{dx}{dt}=\frac{dx'+v\cdot dt'}{dt'+\frac{v}{c^2}\cdot dx'}\cdot\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{\frac{dx'}{dt'}+v}{1+\frac{v}{c^2}\cdot\frac{dx'}{dt'}}=\frac{u_x'+v}{1+\frac{v}{c^2}\cdot u_x'} \qquad \textbf{(G2)}$$

$$u_y=\frac{dy}{dt}=\frac{dy'}{dt'+\frac{v}{c^2}\cdot dx'}\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{\frac{dy'}{dt'}}{1+\frac{v}{c^2}\cdot\frac{dx'}{dt'}}\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{u_y'}{1+\frac{v}{c^2}\cdot u_x'}\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad \textbf{(G3)}$$

$$u_z=\frac{dz}{dt}=\frac{dz'}{dt'+\frac{v}{c^2}\cdot dx'}\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{\frac{dz'}{dt'}}{1+\frac{v}{c^2}\cdot\frac{dx'}{dt'}}\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{u_z'}{1+\frac{v}{c^2}\cdot u_x'}\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad \textbf{(G4)}$$

und durch nochmaliges differenzieren nach der Zeit erhalten wir die Beschleunigungstransformationen.

$$a_x=\frac{du_x}{dt}=\frac{\dfrac{du_x'\cdot\left(1+\frac{v}{c^2}\cdot u_x'\right)-\left(u_x'+v\right)\cdot\frac{v}{c^2}\cdot du_x'}{\left(1+\frac{v}{c^2}\cdot u_x'\right)^2}}{\dfrac{dt'+\frac{v}{c^2}\cdot dx'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}=\frac{a_x'\cdot\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1+\frac{v}{c^2}\cdot u_x'\right)^3} \qquad \textbf{(G5)}$$

$$a_y = \frac{du_y}{dt} = \frac{\left(1+\frac{v \cdot u_x'}{c^2}\right) \cdot a_y' - \frac{v \cdot u_y'}{c^2} \cdot a_x'}{\left(1+\frac{v}{c^2} \cdot u_x'\right)^3} \cdot \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) \qquad \textbf{(G6)}$$

$$a_z = \frac{du_z}{dt} = \frac{\left(1+\frac{v \cdot u_x'}{c^2}\right) \cdot a_z' - \frac{v \cdot u_z'}{c^2} \cdot a_x'}{\left(1+\frac{v \cdot u_x'}{c^2}\right)^3} \cdot \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) \qquad \textbf{(G7)}$$

Jetzt wollen wir eine Punktmasse m betrachten, die sich entlang der X-Achse beschleunigt bewegt. Seien u_x und a_x die momentane Geschwindigkeit und die momentane Beschleunigung in S und entsprechend seien u_x' und a_x' die momentane Geschwindigkeit und die momentane Beschleunigung in S'. Ferner seien $u_y' = u_z' = 0$ und $a_y' = a_z' = 0$. Damit bleiben von **(G2)** bis **(G7)** lediglich die Gleichungen

(G2) : $u_x = \frac{u_x' + v}{1+\frac{v \cdot u_x'}{c^2}}$ und **(G5)** : $a_x = \frac{a_x' \cdot \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1+\frac{v}{c^2} \cdot u_x'\right)^3}$ übrig , da alle anderen

Null werden. Nun wählen wir S' so, dass gilt: $u_x' = 0$. S' sei also das momentane Ruhsystem von S' . Ferner sei $a_x' = konstant$. Die Probemasse m erfährt in momentanem Ruhsystem stetts eine konstante Beschleunigung.

Damit folgt $u_x = v$ und $a_x = a_x' \cdot \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}$ **(G8)**

Benutzen wir v anstatt u_x dann können wir schreiben: $dv = a_x' \cdot \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot dt$

$$\int_0^v \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}v = \int_0^t a_x' \mathrm{d}t \quad \text{oder} \quad \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = a_x' \cdot t \quad \text{damit} \quad v(t) = \frac{a_x' \cdot t}{\sqrt{1+\frac{a_x'^2 \cdot t^2}{c^2}}} \qquad \textbf{(G9)}$$

weiter gilt: $dx = \frac{a_x{}' \cdot t}{\sqrt{1+\frac{a_x{}'^2 \cdot t^2}{c^2}}} \cdot dt$ oder $\int_{x_0}^{x} 1 \, \mathrm{d}x = \int_0^t \frac{a_x{}' \cdot t}{\sqrt{1+\frac{a_x{}'^2 \cdot t^2}{c^2}}} \, \mathrm{d}t$

wegen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{c^2}{a_x{}'} \cdot \sqrt{1+\frac{a_x{}'^2 \cdot t^2}{c^2}}\right) = \frac{a_x{}' \cdot t}{\sqrt{1+\frac{a_x{}'^2 \cdot t^2}{c^2}}}$ erhalten wir

$$x(t) = \frac{c^2}{a_x{}'} \cdot \left(\sqrt{1+\frac{a_x{}'^2 \cdot t^2}{c^2}} - 1\right) + x_0 \qquad \textbf{(G10)}$$

7.2 Anhang 2

Berechnung von Gleichung (10):

Für den Spiegel 1 gilt in S : $x(t)=\frac{c^2}{a_x}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{{a_x}^2\cdot t^2}{c^2}}-1\right)+x_1$

Für den Lichtstrahl 0 gilt in S : $x_c(t)=c\cdot t+x_0$
Bei der Berechnung gebrauche ich die Hilfsvariablen t_1 und t_2 .
Zum Zeitpunkt $t=t_1$ holt der Lichtstrahl 0 den Spiegel 1 ein. Dann gilt $x(t)=x_c(t)$

$$\frac{c^2}{a_x}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{{a_x}^2\cdot {t_1}^2}{c^2}}-1\right)+x_1=c\cdot t_1+x_0$$

$\sqrt{1+\frac{{a_x}^2\cdot {t_1}^2}{c^2}}-1+\frac{a_x\cdot x_1}{c^2}=\frac{a_x\cdot t_1}{c}+\frac{a_x\cdot x_0}{c^2}$ mit $a_x=\frac{c^2}{x_1}$ und $a_0=\frac{c^2}{x_0}$

$\sqrt{1+\frac{{a_x}^2\cdot {t_1}^2}{c^2}}=\frac{a_x\cdot t_1}{c}+\frac{a_x}{a_0}$ oder $1+\frac{{a_x}^2\cdot {t_1}^2}{c^2}=\left(\frac{a_x\cdot t_1}{c}\right)^2+\left(\frac{a_x}{a_0}\right)^2+2\cdot\frac{a_x\cdot t_1}{c}\cdot\frac{a_x}{a_0}$

$1-\left(\frac{a_x}{a_0}\right)^2=2\cdot\frac{a_x\cdot t_1}{c}\cdot\frac{a_x}{a_0}$ ergibt $t_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{a_x}\cdot\left(\frac{a_0}{a_x}-\frac{a_x}{a_0}\right)$

Für den zum Zeitpunkt $t=t_1$ am Spiegel1 reflextierte Lichtstrahl 0 gilt:

$$x_c=-c\cdot(t-t_1)+\frac{c^2}{a_x}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{{a_x}^2\cdot {t_1}^2}{c^2}}-1\right)+x_1$$

Für die Bewegung von Spiegel 0 gilt: $x(t)=\frac{c^2}{a_0}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{{a_0}^2\cdot t^2}{c^2}}-1\right)+x_0$
Zum Zeitpunkt $t=t_2$ möge der Lichtstrahl 0 an der Koordinate x''_0 am Spiegel 0 ankommen. Dann gilt : $x(t_2)=x_c(t_2)$

$$\frac{c^2}{a_0}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{{a_0}^2\cdot {t_2}^2}{c^2}}-1\right)+x_0=-c\cdot(t_2-t_1)+\frac{c^2}{a_x}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{{a_x}^2\cdot {t_1}^2}{c^2}}-1\right)+x_1$$

$$\sqrt{1+\frac{{a_0}^2\cdot {t_2}^2}{c^2}}-1+\frac{a_0\cdot x_0}{c^2}=-\frac{a_0\cdot(t_2-t_1)}{c}+\frac{a_0}{a_x}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{{a_x}^2\cdot {t_1}^2}{c^2}}-1\right)+\frac{a_0\cdot x_1}{c^2}$$

mit $a_x=\frac{c^2}{x_1}$ und $a_0=\frac{c^2}{x_0}$

$$\sqrt{1+\frac{a_0^{\,2}\cdot t_2^{\,2}}{c^2}} = -\frac{a_0\cdot(t_2-t_1)}{c}+\frac{a_0}{a_x}\cdot\sqrt{1+\frac{a_x^{\,2}\cdot t_1^{\,2}}{c^2}}-\frac{a_0}{a_x}+\frac{a_0\cdot x_1}{c^2}$$

mit $-\frac{a_0}{a_x}+\frac{a_0\cdot x_1}{c^2}=0$ folgt $\sqrt{1+\frac{a_0^{\,2}\cdot t_2^{\,2}}{c^2}} = -\frac{a_0\cdot t_2}{c}+\frac{a_0\cdot t_1}{c}+\frac{a_0}{a_x}\cdot\sqrt{1+\frac{a_x^{\,2}\cdot t_1^{\,2}}{c^2}}$

Aus $t_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{a_x}\cdot\left(\frac{a_0}{a_x}-\frac{a_x}{a_0}\right)$ folgt einerseits $\frac{a_0\cdot t_1}{c}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a_0}{a_x}\cdot\left(\frac{a_0}{a_x}-\frac{a_x}{a_0}\right)$

andererseits $\sqrt{1+\frac{a_x^{\,2}\cdot t_1^{\,2}}{c^2}} = \sqrt{1+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{a_0}{a_x}-\frac{a_x}{a_0}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{a_0}{a_x}+\frac{a_x}{a_0}\right)^2} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a_0}{a_x}+\frac{a_x}{a_0}\right)$

damit $\sqrt{1+\frac{a_0^{\,2}\cdot t_2^{\,2}}{c^2}} = -\frac{a_0\cdot t_2}{c}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a_0}{a_x}\cdot\left(\frac{a_0}{a_x}-\frac{a_x}{a_0}\right)+\frac{a_0}{a_x}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a_0}{a_x}+\frac{a_x}{a_0}\right)$

$$\sqrt{1+\frac{a_0^{\,2}\cdot t_2^{\,2}}{c^2}} = -\frac{a_0\cdot t_2}{c}+\frac{a_0^{\,2}}{a_x^{\,2}}$$

$1+\frac{a_0^{\,2}\cdot t_2^{\,2}}{c^2} = \left(-\frac{a_0\cdot t_2}{c}\right)^2+\left(\frac{a_0^{\,2}}{a_x^{\,2}}\right)^2-2\cdot\frac{a_0\cdot t_2}{c}\cdot\frac{a_0^{\,2}}{a_x^{\,2}}$ oder $1=\left(\frac{a_0^{\,2}}{a_x^{\,2}}\right)^2-2\cdot\frac{a_0\cdot t_2}{c}\cdot\frac{a_0^{\,2}}{a_x^{\,2}}$

nach t_2 aufgelöst ergibt $t_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{a_0}\cdot\left(\frac{a_0^{\,2}}{a_x^{\,2}}-\frac{a_x^{\,2}}{a_0^{\,2}}\right)$

Bei der Gleichung (10) wird der index 0 benutzt also lautet die Indexierung nach

nach (G10) $t_0=\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{a_0}\cdot\left(\frac{a_0^{\,2}}{a_x^{\,2}}-\frac{a_x^{\,2}}{a_0^{\,2}}\right)$

Berechnung von Gleichung (11):

Für den Spiegel 0 gilt in S : $x(t)=\frac{c^2}{a_0}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{a_0^{\,2}\cdot t^2}{c^2}}-1\right)+x_0$

Für den Lichtstrahl 1 gilt in S : $x_c(t)=-c\cdot t+x_1$
Bei der Berechnung gebrauche ich die Hilfsvariablen t_1 und t_2 .
Zum Zeitpunkt $t=t_1$ erreicht der Lichtstrahl 1 den Spiegel 0 . Dann gilt $x\left(t_1\right)=x_c\left(t_1\right)$

$$\frac{c^2}{a_0}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{a_0^{\,2}\cdot t_1^{\,2}}{c^2}}-1\right)+x_0=-c\cdot t_1+x_1$$

$$\sqrt{1+\frac{a_0^{\,2}\cdot t_1^{\,2}}{c^2}}-1+\frac{a_0\cdot x_0}{c^2}=-\frac{a_0\cdot t_1}{c}+\frac{a_0\cdot x_1}{c^2}\quad\text{mit}\quad a_x=\frac{c^2}{x_1}\ \text{und}\ a_0=\frac{c^2}{x_0}$$

$$\sqrt{1+\frac{a_0^{\,2}\cdot t_1^{\,2}}{c^2}}=-\frac{a_0\cdot t_1}{c}+\frac{a_0}{a_x}\quad\text{oder}\quad 1+\frac{a_0^{\,2}\cdot t_1^{\,2}}{c^2}=\left(-\frac{a_0\cdot t_1}{c}\right)^2+\left(\frac{a_0}{a_x}\right)^2-2\cdot\frac{a_0\cdot t_1}{c}\cdot\frac{a_0}{a_x}$$

$$1-\left(\frac{a_0}{a_x}\right)^2=-2\cdot\frac{a_0\cdot t_1}{c}\cdot\frac{a_0}{a_x}\quad\text{ergibt}\quad t_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{a_0}\cdot\left(\frac{a_0}{a_x}-\frac{a_x}{a_0}\right)$$

Für den zum Zeitpunkt $t=t_1$ am Spiegel 0 reflextierte Lichtstrahl 1 gilt:

$$x_c=c\cdot\left(t-t_1\right)+\frac{c^2}{a_0}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{a_0^{\,2}\cdot t_1^{\,2}}{c^2}}-1\right)+x_0$$

Für die Bewegung von Spiegel 1 gilt: $x(t)=\frac{c^2}{a_x}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{a_x^{\,2}\cdot t^2}{c^2}}-1\right)+x_1$

Zum Zeitpunkt $t=t_2$ möge der Lichtstrahl 1 an der Koordinate x''_1 am Spiegel 1 ankommen. Dann gilt : $x\left(t_2\right)=x_c\left(t_2\right)$

$$\frac{c^2}{a_x}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{a_x^{\,2}\cdot t_2^{\,2}}{c^2}}-1\right)+x_1=c\cdot\left(t_2-t_1\right)+\frac{c^2}{a_0}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{a_0^{\,2}\cdot t_1^{\,2}}{c^2}}-1\right)+x_0$$

$$\sqrt{1+\frac{a_x^{\,2}\cdot t_2^{\,2}}{c^2}}-1+\frac{a_x\cdot x_1}{c^2}=\frac{a_x\cdot\left(t_2-t_1\right)}{c}+\frac{a_x}{a_0}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{a_0^{\,2}\cdot t_1^{\,2}}{c^2}}-1\right)+\frac{a_x\cdot x_0}{c^2}$$

mit $a_x=\frac{c^2}{x_1}$ und $a_0=\frac{c^2}{x_0}$

$$\sqrt{1+\frac{a_x^{\,2}\cdot t_2^{\,2}}{c^2}}=\frac{a_x\cdot(t_2-t_1)}{c}+\frac{a_x}{a_0}\cdot\sqrt{1+\frac{a_0^{\,2}\cdot t_1^{\,2}}{c^2}}-\frac{a_x}{a_0}+\frac{a_x\cdot x_0}{c^2}$$

mit $-\frac{a_x}{a_0}+\frac{a_x\cdot x_0}{c^2}=0$ folgt $\sqrt{1+\frac{a_x^{\,2}\cdot t_2^{\,2}}{c^2}}=\frac{a_x\cdot t_2}{c}-\frac{a_x\cdot t_1}{c}+\frac{a_x}{a_0}\cdot\sqrt{1+\frac{a_0^{\,2}\cdot t_1^{\,2}}{c^2}}$

Aus $t_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{a_0}\cdot\left(\frac{a_0}{a_x}-\frac{a_x}{a_0}\right)$ folgt einerseits $\frac{a_x\cdot t_1}{c}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a_x}{a_0}\cdot\left(\frac{a_0}{a_x}-\frac{a_x}{a_0}\right)$

andererseits $\sqrt{1+\frac{a_0^{\,2}\cdot t_1^{\,2}}{c^2}}=\sqrt{1+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{a_0}{a_x}-\frac{a_x}{a_0}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{a_0}{a_x}+\frac{a_x}{a_0}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a_0}{a_x}+\frac{a_x}{a_0}\right)$

damit $\sqrt{1+\frac{a_x^{\,2}\cdot t_2^{\,2}}{c^2}}=\frac{a_x\cdot t_2}{c}-\frac{1}{2}\cdot\frac{a_x}{a_0}\cdot\left(\frac{a_0}{a_x}-\frac{a_x}{a_0}\right)+\frac{a_x}{a_0}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a_0}{a_x}+\frac{a_x}{a_0}\right)$

$$\sqrt{1+\frac{a_x^{\,2}\cdot t_2^{\,2}}{c^2}}=\frac{a_x\cdot t_2}{c}+\frac{a_x^{\,2}}{a_0^{\,2}}$$

$1+\frac{a_x^{\,2}\cdot t_2^{\,2}}{c^2}=\left(\frac{a_x\cdot t_2}{c}\right)^2+\left(\frac{a_x^{\,2}}{a_0^{\,2}}\right)^2+2\cdot\frac{a_x\cdot t_2}{c}\cdot\frac{a_x^{\,2}}{a_0^{\,2}}$ oder $1=\left(\frac{a_x^{\,2}}{a_0^{\,2}}\right)^2+2\cdot\frac{a_x\cdot t_2}{c}\cdot\frac{a_x^{\,2}}{a_0^{\,2}}$

nach t_2 aufgelöst ergibt $t_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{a_x}\cdot\left(\frac{a_0^{\,2}}{a_x^{\,2}}-\frac{a_x^{\,2}}{a_0^{\,2}}\right)$

Bei der Gleichung (11) wird der index x benutzt also lautet die Indexierung nach

nach (G11) $t_x=\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{a_x}\cdot\left(\frac{a_0^{\,2}}{a_x^{\,2}}-\frac{a_x^{\,2}}{a_0^{\,2}}\right)$

7.3 Anhang 3

Berechung von (G13) und (G14) :

Eine Uhr an der Koordinate x''_0 bewegt sich relativ zu S mit der Beschleunigung a_0 , wodurch sich die relativ Geschwindigkeit ständig ändert. Für einen infinitesimalen Zeitintervall in dem wir die Geschwindigkeit als konstant annehmen können gilt:

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$ **(A3G1)** mit $$v = \frac{a \cdot t}{\sqrt{1+\frac{a^2 \cdot t^2}{c^2}}}$$ **(A3G2)** oder $$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2 \cdot t^2}{c^2}}}$$

ergibt sich $$\frac{dt}{\sqrt{1+\frac{a^2 \cdot t^2}{c^2}}} = d\tau$$ oder als Integral $$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2 \cdot t^2}{c^2}}} \, dt = \int_0^\tau 1 \, d\tau = \tau$$

Subsitution: $t = \frac{c}{a} \cdot sinh(u)$ oder $dt = \frac{c}{a} \cdot cosh(u) \cdot du$

$$\int_{(0)}^{(t)} \frac{\frac{c}{a} \cdot cosh(u)}{cosh(u)} \, du = \int_{(0)}^{(t)} \frac{c}{a} \, du = \tau$$ mit $$\int \frac{c}{a} \, du = \frac{c}{a} \cdot u = \tau$$ folgt $$u = \frac{a}{c} \cdot \tau$$

mit der Rücksubsitution : $arsinh\left(\frac{a \cdot t}{c}\right) = \frac{a}{c} \cdot \tau$

berüchsichtigen wir die Integrationsgrenzen $arsinh\left(\frac{a \cdot t}{c}\right) - arsinh(0) = \frac{a}{c} \cdot \tau$

so folgt $t = \frac{c}{a} \cdot sinh\left(\frac{a}{c} \cdot \tau\right)$ **(A3G3)**

Auf die Koordinate x''_0 und dem Spiegel 0 angewendet gilt: $a = a_0$, $\tau = \Delta\tau_0$,

Sei jetzt $t = \Delta t_0 = \frac{c}{2 \cdot a_0} \cdot \left(\frac{{a_0}^2}{{a_x}^2} - \frac{{a_x}^2}{{a_0}^2}\right) = \frac{c}{a_0} \cdot sinh\left(\frac{a_0}{c} \cdot \Delta\tau_0\right)$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{{a_0}^2}{{a_x}^2} - \frac{{a_x}^2}{{a_0}^2}\right) = sinh\left(\frac{a_0}{c} \cdot \Delta\tau_0\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{a_0}{c} \cdot \Delta\tau_0} - e^{-\frac{a_0}{c} \cdot \Delta\tau_0}\right)$$ oder $$e^{\frac{a_0}{c} \cdot \Delta\tau_0} = \frac{{a_0}^2}{{a_x}^2}$$

ergibt $\Delta\tau_0 = \frac{c}{a_0} \cdot ln\left(\frac{{a_0}^2}{{a_x}^2}\right) = 2 \cdot \frac{c}{a_0} \cdot ln\left(\frac{a_0}{a_x}\right)$ **(A3G4)**

Wenden wir **(A3G3)** auf die Koordinate x''_1 und dem Spiegel 1 an so folgt :

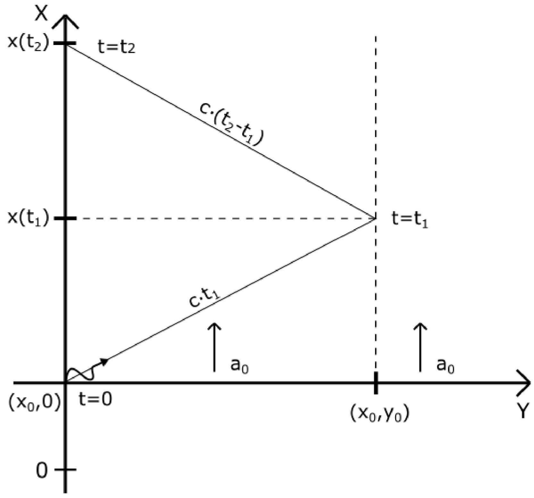
$a = a_x$, $\tau = \Delta\tau_x$ und damit $t = \Delta t_x = \frac{c}{2 \cdot a_x} \cdot \left(\frac{{a_0}^2}{{a_x}^2} - \frac{{a_x}^2}{{a_0}^2} \right) = \frac{c}{a_x} \cdot sinh\left(\frac{a_x}{c} \cdot \Delta\tau_0 \right)$

ergibt $\Delta\tau_x = 2 \cdot \frac{c}{a_x} \cdot ln\left(\frac{a_0}{a_x} \right)$ **(A3G5)**

7.4 Anhang 4

Berechnen von Gleichungen 24,25,26,27

Vom Inertialsystem S ausgesehen ergibt sich das folgende Bild. Siehe Abbildung



Es gilt : $x(t=0)=x_0$ und

$$x(t_i)=\frac{c^2}{a_0}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{a_0^{\,2}\cdot t_i^{\,2}}{c^2}}-1\right)+x_0 \quad \text{für } i=1,2$$

sowie $c^2\cdot t_1^{\,2}=\left(x(t_1)-x_0\right)^2+y_0^{\,2}$ und

$$c^2\cdot\left(t_2-t_1\right)^2=\left(x(t_2)-x(t_1)\right)^2+y_0^{\,2}$$

Aus der Gleichung $c^2\cdot t_1^{\,2}=\left(\frac{c^2}{a_0}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{a_0^{\,2}\cdot t_1^{\,2}}{c^2}}-1\right)\right)^2+y_0^{\,2}$ folgt

$$\frac{a_0^{\,2}\cdot t_1^{\,2}}{c^2}=\left(\sqrt{1+\frac{a_0^{\,2}\cdot t_1^{\,2}}{c^2}}-1\right)^2+\frac{a_0^{\,2}\cdot y_0^{\,2}}{c^4}$$

$$\frac{a_0^{\,2}\cdot t_1^{\,2}}{c^2}=1+\frac{a_0^{\,2}\cdot t_1^{\,2}}{c^2}-2\cdot\sqrt{1+\frac{a_0^{\,2}\cdot t_1^{\,2}}{c^2}}+1+\frac{a_0^{\,2}\cdot y_0^{\,2}}{c^4}$$

$$0=2-2\cdot\sqrt{1+\frac{a_0^{\,2}\cdot t_1^{\,2}}{c^2}}+\frac{a_0^{\,2}\cdot y_0^{\,2}}{c^4} \quad \text{oder} \quad \sqrt{1+\frac{a_0^{\,2}\cdot t_1^{\,2}}{c^2}}=1+\frac{a_0^{\,2}\cdot y_0^{\,2}}{2\cdot c^4} \qquad \textbf{(A4G1)}$$

$$\frac{a_0\cdot t_1}{c}=\sqrt{\left(1+\frac{a_0^{\,2}\cdot y_0^{\,2}}{2\cdot c^4}\right)^2-1}=\left(\sqrt{\left(1+\frac{a_0^{\,2}\cdot y_0^{\,2}}{2\cdot c^4}\right)-1}\right)\cdot\left(\sqrt{\left(1+\frac{a_0^{\,2}\cdot y_0^{\,2}}{2\cdot c^4}\right)-1}\right)$$

$$\frac{a_0\cdot t_1}{c}=\sqrt{\frac{a_0^{\,2}\cdot y_0^{\,2}}{2\cdot c^4}}\cdot\sqrt{2+\frac{a_0^{\,2}\cdot y_0^{\,2}}{2\cdot c^4}}=\frac{a_0\cdot y_0}{c^2}\cdot\sqrt{1+\frac{a_0^{\,2}\cdot y_0^{\,2}}{4\cdot c^4}} \qquad \textbf{(A4G2)}$$

$$t_1=\frac{y_0}{c}\cdot\sqrt{1+\frac{a_0^{\,2}\cdot y_0^{\,2}}{4\cdot c^4}} \qquad \textbf{(A4G3)}$$

Aus (A4G1) und (A4G2) folgt zuerst durch Addition

$$\frac{a_0\cdot t_1}{c}+\sqrt{1+\frac{a_0^{\,2}\cdot t_1^{\,2}}{c^2}}=\frac{a_0\cdot y_0}{c^2}\cdot\sqrt{1+\frac{a_0^{\,2}\cdot y_0^{\,2}}{4\cdot c^4}}+1+\frac{a_0^{\,2}\cdot y_0^{\,2}}{2\cdot c^4}$$

oder $$\frac{a_0 \cdot t_1}{c} + \sqrt{1 + \frac{a_0^2 \cdot t_1^2}{c^2}} = \left(\frac{a_0 \cdot y_0}{2 \cdot c^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{a_0 \cdot y_0}{2 \cdot c^2} \right)^2} \right)^2 \qquad \textbf{(A4G4)}$$

Weiterhin gilt die folgende Gleichung (A4G5), von deren Richtigkeit man sich durch einfaches ausmultiplizieren überzeugen kann.

$$t_1 = \frac{c}{2 \cdot a_0} \cdot \left(\left(\frac{a_0 \cdot t_1}{c} + \sqrt{1 + \frac{a_0^2 \cdot t_1^2}{c^2}} \right)^1 - \left(\frac{a_0 \cdot t_1}{c} + \sqrt{1 + \frac{a_0^2 \cdot t_1^2}{c^2}} \right)^{-1} \right) \qquad \textbf{(A4G5)}$$

setzen wir (A4G4) in die Gleichung (A4G5) ein so folgt

$$t_1 = \frac{c}{2 \cdot a_0} \cdot \left(\left(\frac{a_0 \cdot y_0}{2 \cdot c^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{a_0 \cdot y_0}{2 \cdot c^2} \right)^2} \right)^2 - \left(\frac{a_0 \cdot y_0}{2 \cdot c^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{a_0 \cdot y_0}{2 \cdot c^2} \right)^2} \right)^{-2} \right) \qquad \textbf{(A4G6)}$$

<u>Berechnung von</u> t_2

Aus $c^2 \cdot (t_2 - t_1)^2 = (x(t_2) - x(t_1))^2 + y_0^2$ folgt durch multiplikation mit $\frac{a_0^2}{c^4}$ zuerst

$$\frac{a_0^2 \cdot (t_2 - t_1)^2}{c^2} = \left(\frac{a_0 \cdot (x(t_2) - x(t_1))}{c^2} \right)^2 + \frac{a_0^2 \cdot y_0^2}{c^4}$$

$$\frac{a_0^2 \cdot t_2^2}{c^2} + \frac{a_0^2 \cdot t_1^2}{c^2} - 2 \cdot \frac{a_0^2}{c^2} \cdot t_2 \cdot t_1 = \left(\frac{a_0 \cdot (x(t_2) - x(t_1))}{c^2} \right)^2 + \frac{a_0^2 \cdot y_0^2}{c^4} \qquad \textbf{(A4G7)}$$

Sehen wir uns den ersten Ausdruck auf der rechten Seite zuerst an.

$$x(t_2) - x(t_1) = \frac{c^2}{a_0} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{a_0^2 \cdot t_2^2}{c^2}} - 1 \right) + x_0 - \left(\frac{c^2}{a_0} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{a_0^2 \cdot t_1^2}{c^2}} - 1 \right) + x_0 \right)$$

$$x(t_2) - x(t_1) = \frac{c^2}{a_0} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{a_0^2 \cdot t_2^2}{c^2}} - 1 \right) - \frac{c^2}{a_0} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{a_0^2 \cdot t_1^2}{c^2}} - 1 \right)$$

$$\frac{a_0 \cdot (x(t_2) - x(t_1))}{c^2} = \sqrt{1 + \frac{a_0^2 \cdot t_2^2}{c^2}} - \sqrt{1 + \frac{a_0^2 \cdot t_1^2}{c^2}}$$ setzen wir (A4G1) hier ein

$$\frac{a_0 \cdot (x(t_2) - x(t_1))}{c^2} = \sqrt{1 + \frac{a_0^2 \cdot t_2^2}{c^2}} - \left(1 + \frac{a_0^2 \cdot y_0^2}{2 \cdot c^4} \right)$$

$$\left(\frac{a_0 \cdot (x(t_2) - x(t_1))}{c^2} \right)^2 = 1 + \frac{a_0^2 \cdot t_2^2}{c^2} + \left(1 + \frac{a_0^2 \cdot y_0^2}{2 \cdot c^4} \right)^2 - 2 \cdot \left(1 + \frac{a_0^2 \cdot y_0^2}{2 \cdot c^4} \right) \cdot \sqrt{1 + \frac{a_0^2 \cdot t_2^2}{c^2}}$$

Setzen wir diesen Ausdruck und die Gleichung (A4G2) in die Gleichung (A4G7) ein

$$\frac{{a_0}^2 \cdot {t_2}^2}{c^2} + \frac{{a_0}^2 \cdot {t_1}^2}{c^2} - 2 \cdot \frac{{a_0}^2}{c^2} \cdot t_2 \cdot t_1 = \left(\frac{a_0 \cdot (x(t_2) - x(t_1))}{c^2} \right)^2 + \frac{{a_0}^2 \cdot {y_0}^2}{c^4}$$

so folgt

$$\frac{{a_0}^2 \cdot {y_0}^2}{c^4} \cdot \left(1 + \frac{{a_0}^2 \cdot {y_0}^2}{4 \cdot c^4}\right) - 2 \cdot \frac{{a_0}^2}{c^2} \cdot t_2 \cdot t_1 =$$

$$= 1 + \left(1 + \frac{{a_0}^2 \cdot {y_0}^2}{2 \cdot c^4}\right)^2 - 2 \cdot \left(1 + \frac{{a_0}^2 \cdot {y_0}^2}{2 \cdot c^4}\right) \cdot \sqrt{1 + \frac{{a_0}^2 \cdot {t_2}^2}{c^2}} + \frac{{a_0}^2 \cdot {y_0}^2}{c^4}$$

$$\frac{{a_0}^4 \cdot {y_0}^4}{4 \cdot c^8} - 2 \cdot \frac{{a_0}^2}{c^2} \cdot t_2 \cdot t_1 = 1 + \left(1 + \frac{{a_0}^2 \cdot {y_0}^2}{2 \cdot c^4}\right)^2 - 2 \cdot \left(1 + \frac{{a_0}^2 \cdot {y_0}^2}{2 \cdot c^4}\right) \cdot \sqrt{1 + \frac{{a_0}^2 \cdot {t_2}^2}{c^2}}$$

und mit (A4G2) $\frac{a_0 \cdot t_1}{c} = \frac{a_0 \cdot y_0}{c^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{{a_0}^2 \cdot {y_0}^2}{4 \cdot c^4}}$

$$\frac{{a_0}^4 \cdot {y_0}^4}{4 \cdot c^8} - 2 \cdot \frac{a_0 \cdot t_2}{c} \cdot \frac{a_0 \cdot y_0}{c^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{{a_0}^2 \cdot {y_0}^2}{4 \cdot c^4}} =$$

$$= 1 + \left(1 + \frac{{a_0}^2 \cdot {y_0}^2}{2 \cdot c^4}\right)^2 - 2 \cdot \left(1 + \frac{{a_0}^2 \cdot {y_0}^2}{2 \cdot c^4}\right) \cdot \sqrt{1 + \frac{{a_0}^2 \cdot {t_2}^2}{c^2}}$$

$$-\frac{a_0 \cdot t_2}{c} \cdot \frac{a_0 \cdot y_0}{c^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{{a_0}^2 \cdot {y_0}^2}{4 \cdot c^4}} = 1 + \frac{{a_0}^2 \cdot {y_0}^2}{2 \cdot c^4} - \left(1 + \frac{{a_0}^2 \cdot {y_0}^2}{2 \cdot c^4}\right) \cdot \sqrt{1 + \frac{{a_0}^2 \cdot {t_2}^2}{c^2}}$$

$$-\frac{\frac{a_0 \cdot t_2}{c} \cdot \frac{a_0 \cdot y_0}{c^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{{a_0}^2 \cdot {y_0}^2}{4 \cdot c^4}}}{1 + \frac{{a_0}^2 \cdot {y_0}^2}{2 \cdot c^4}} = 1 - \sqrt{1 + \frac{{a_0}^2 \cdot {t_2}^2}{c^2}}$$

$$\sqrt{1 + \frac{{a_0}^2 \cdot {t_2}^2}{c^2}} = 1 + \frac{\frac{a_0 \cdot t_2}{c} \cdot \frac{a_0 \cdot y_0}{c^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{{a_0}^2 \cdot {y_0}^2}{4 \cdot c^4}}}{1 + \frac{{a_0}^2 \cdot {y_0}^2}{2 \cdot c^4}}$$ quadrieren wir beide Seiten

$$1+\frac{a_0^{\,2}\cdot t_2^{\,2}}{c^2}=1+2\cdot\frac{\frac{a_0\cdot t_2}{c}\cdot\frac{a_0\cdot y_0}{c^2}\cdot\sqrt{1+\frac{a_0^{\,2}\cdot y_0^{\,2}}{4\cdot c^4}}}{1+\frac{a_0^{\,2}\cdot y_0^{\,2}}{2\cdot c^4}}+\left(\frac{\frac{a_0\cdot t_2}{c}\cdot\frac{a_0\cdot y_0}{c^2}\cdot\sqrt{1+\frac{a_0^{\,2}\cdot y_0^{\,2}}{4\cdot c^4}}}{1+\frac{a_0^{\,2}\cdot y_0^{\,2}}{2\cdot c^4}}\right)^2$$

$$\frac{a_0^{\,2}\cdot t_2^{\,2}}{c^2}=2\cdot\frac{\frac{a_0\cdot t_2}{c}\cdot\frac{a_0\cdot y_0}{c^2}\cdot\sqrt{1+\frac{a_0^{\,2}\cdot y_0^{\,2}}{4\cdot c^4}}}{1+\frac{a_0^{\,2}\cdot y_0^{\,2}}{2\cdot c^4}}+\frac{\frac{a_0^{\,2}\cdot t_2^{\,2}}{c^2}\cdot\frac{a_0^{\,2}\cdot y_0^{\,2}}{c^4}\cdot\left(1+\frac{a_0^{\,2}\cdot y_0^{\,2}}{4\cdot c^4}\right)}{\left(1+\frac{a_0^{\,2}\cdot y_0^{\,2}}{2\cdot c^4}\right)^2}$$

$$\frac{a_0\cdot t_2}{c}=2\cdot\frac{\frac{a_0\cdot y_0}{c^2}\cdot\sqrt{1+\frac{a_0^{\,2}\cdot y_0^{\,2}}{4\cdot c^4}}}{1+\frac{a_0^{\,2}\cdot y_0^{\,2}}{2\cdot c^4}}+\frac{\frac{a_0\cdot t_2}{c}\cdot\frac{a_0^{\,2}\cdot y_0^{\,2}}{c^4}\cdot\left(1+\frac{a_0^{\,2}\cdot y_0^{\,2}}{4\cdot c^4}\right)}{\left(1+\frac{a_0^{\,2}\cdot y_0^{\,2}}{2\cdot c^4}\right)^2}$$

$$\frac{a_0\cdot t_2}{c}\cdot\left(1-\frac{\frac{a_0^{\,2}\cdot y_0^{\,2}}{c^4}\cdot\left(1+\frac{a_0^{\,2}\cdot y_0^{\,2}}{4\cdot c^4}\right)}{\left(1+\frac{a_0^{\,2}\cdot y_0^{\,2}}{2\cdot c^4}\right)^2}\right)=2\cdot\frac{\frac{a_0\cdot y_0}{c^2}\cdot\sqrt{1+\frac{a_0^{\,2}\cdot y_0^{\,2}}{4\cdot c^4}}}{1+\frac{a_0^{\,2}\cdot y_0^{\,2}}{2\cdot c^4}}$$

$$\frac{a_0\cdot t_2}{c}\cdot\frac{1}{1+\frac{a_0^{\,2}\cdot y_0^{\,2}}{2\cdot c^4}}=2\cdot\frac{a_0\cdot y_0}{c^2}\cdot\sqrt{1+\frac{a_0^{\,2}\cdot y_0^{\,2}}{4\cdot c^4}}$$

ergibt dann $t_2=2\cdot\frac{y_0}{c}\cdot\left(1+\frac{a_0^{\,2}\cdot y_0^{\,2}}{2\cdot c^4}\right)\cdot\sqrt{1+\frac{a_0^{\,2}\cdot y_0^{\,2}}{4\cdot c^4}}$ **(A4G8)**

und mit (A4G1) und (A4G3) folgt: $t_2=2\cdot t_1\cdot\sqrt{1+\frac{a_0^{\,2}\cdot t_1^{\,2}}{c^2}}$ **(A4G9)**

Aus (A4G8) folgt dann weiter

$$\frac{a_0 \cdot t_2}{c} = 2 \cdot \frac{a_0 \cdot t_1}{c} \cdot \sqrt{1 + \frac{a_0^{\,2} \cdot t_1^{\,2}}{c^2}} \qquad \textbf{(A4G10)}$$

$$\frac{a_0^{\,2} \cdot t_2^{\,2}}{c^2} = 4 \cdot \frac{a_0^{\,2} \cdot t_1^{\,2}}{c^2} \cdot \left(1 + \frac{a_0^{\,2} \cdot t_1^{\,2}}{c^2}\right)$$

damit $1 + \frac{a_0^{\,2} \cdot t_2^{\,2}}{c^2} = 1 + 4 \cdot \frac{a_0^{\,2} \cdot t_1^{\,2}}{c^2} + 4 \cdot \frac{a_0^{\,4} \cdot t_1^{\,4}}{c^4} = \left(1 + 2 \cdot \frac{a_0^{\,2} \cdot t_1^{\,2}}{c^2}\right)^2$

ergibt $\sqrt{1 + \frac{a_0^{\,2} \cdot t_2^{\,2}}{c^2}} = 1 + 2 \cdot \frac{a_0^{\,2} \cdot t_1^{\,2}}{c^2}$ **(A4G11)**

Addieren wir (A4G10) und (A4G11) auf so folgt weiter

$$\frac{a_0 \cdot t_2}{c} + \sqrt{1 + \frac{a_0^{\,2} \cdot t_2^{\,2}}{c^2}} = 2 \cdot \frac{a_0 \cdot t_1}{c} \cdot \sqrt{1 + \frac{a_0^{\,2} \cdot t_1^{\,2}}{c^2}} + 1 + 2 \cdot \frac{a_0^{\,2} \cdot t_1^{\,2}}{c^2}$$

$$\frac{a_0 \cdot t_2}{c} + \sqrt{1 + \frac{a_0^{\,2} \cdot t_2^{\,2}}{c^2}} = \left(\frac{a_0 \cdot t_1}{c} + \sqrt{1 + \frac{a_0^{\,2} \cdot t_1^{\,2}}{c^2}}\right)^2 \qquad \textbf{(A4G12)}$$

setzen wir (A4G4) in die Gleichung (A4G12) ein so erhalten wir

$$\frac{a_0 \cdot t_2}{c} + \sqrt{1 + \frac{a_0^{\,2} \cdot t_2^{\,2}}{c^2}} = \left(\frac{a_0 \cdot y_0}{2 \cdot c^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{a_0 \cdot y_0}{2 \cdot c^2}\right)^2}\right)^4 \qquad \textbf{(A4G13)}$$

Nach dem Muster von (A4G5) können wir wieder ansetzen:

$$t_2 = \frac{c}{2 \cdot a_0} \cdot \left(\left(\frac{a_0 \cdot t_2}{c} + \sqrt{1 + \frac{a_0^{\,2} \cdot t_2^{\,2}}{c^2}}\right)^1 - \left(\frac{a_0 \cdot t_2}{c} + \sqrt{1 + \frac{a_0^{\,2} \cdot t_2^{\,2}}{c^2}}\right)^{-1}\right) \qquad \textbf{(A4G14)}$$

Setzen wir (A4G13) noch in die Gleichung (A4G14) ein , so sind wir dann auch fertig.

$$t_2 = \frac{c}{2 \cdot a_0} \cdot \left(\left(\frac{a_0 \cdot y_0}{2 \cdot c^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{a_0 \cdot y_0}{2 \cdot c^2}\right)^2}\right)^4 - \left(\frac{a_0 \cdot y_0}{2 \cdot c^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{a_0 \cdot y_0}{2 \cdot c^2}\right)^2}\right)^{-4}\right) \qquad \textbf{(A4G15)}$$

Damit haben wir insgesamt die Gleichungen (A4G6) und (A4G15) erhalten .

$$t_1 = \frac{c}{2 \cdot a_0} \cdot \left(\left(\frac{a_0 \cdot y_0}{2 \cdot c^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{a_0 \cdot y_0}{2 \cdot c^2} \right)^2} \right)^2 - \left(\frac{a_0 \cdot y_0}{2 \cdot c^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{a_0 \cdot y_0}{2 \cdot c^2} \right)^2} \right)^{-2} \right) \quad \textbf{(A4G6)}$$

$$t_2 = \frac{c}{2 \cdot a_0} \cdot \left(\left(\frac{a_0 \cdot y_0}{2 \cdot c^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{a_0 \cdot y_0}{2 \cdot c^2} \right)^2} \right)^4 - \left(\frac{a_0 \cdot y_0}{2 \cdot c^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{a_0 \cdot y_0}{2 \cdot c^2} \right)^2} \right)^{-4} \right) \quad \textbf{(A4G15)}$$

Aus der Gleichung $t = \frac{c}{a_0} \cdot sinh\left(\frac{a_0 \cdot \tau}{c} \right)$ erhalten wir die Zeiten, die an der Koordinate (x"0,0") vergeht.

$$\tau_1 = 2 \cdot \frac{c}{a_0} \cdot ln\left(\frac{a_0 \cdot y_0}{2 \cdot c^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{a_0 \cdot y_0}{2 \cdot c^2} \right)^2} \right) \quad \textbf{(A4G16)}$$

$$\tau_2 = 4 \cdot \frac{c}{a_0} \cdot ln\left(\frac{a_0 \cdot y_0}{2 \cdot c^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{a_0 \cdot y_0}{2 \cdot c^2} \right)^2} \right) \quad \textbf{(A4G17)}$$

Also gilt wie es zu erwarten war $\tau_2 = 2 \cdot \tau_1$ **(A4G18)**

7.5 Anhang 5

Berechnung von (G49) bis (G65)

Aus der Gleichung $x = x'' \cdot cosh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)$ **(A5G1)**

und der Gleichung $t = \frac{x''}{c} \cdot sinh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)$ **(A5G2)**

folgt durch Quadrieren $\frac{x^2}{x''^2} = cosh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)^2$ und $\frac{c^2 \cdot t^2}{x''^2} = sinh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)^2$

$$\frac{x^2}{x''^2} - \frac{c^2 \cdot t^2}{x''^2} = cosh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)^2 - sinh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)^2 = 1$$

und damit die Gleichung $x'' = \sqrt{x^2 - c^2 \cdot t^2}$ **(A5G3)**

Weiterhin folgt aus (A5G1) und (A5G2) durch dividieren

$$\frac{x}{t} = \frac{x'' \cdot cosh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)}{\frac{x''}{c} \cdot sinh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)} = \frac{c \cdot cosh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)}{sinh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)}$$ und durch Quadrieren

$$\frac{x^2}{c^2 \cdot t^2} = \frac{1 + sinh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)^2}{sinh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)^2}$$ oder $$sinh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right)^2 = \frac{1}{\frac{x^2}{c^2 \cdot t^2} - 1} = \frac{c^2 \cdot t^2}{x^2 - c^2 \cdot t^2}$$

$$sinh\left(\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}} - e^{-\frac{a_{x''} \cdot \tau_{x''}}{c}}\right) = \frac{c \cdot t}{\sqrt{x^2 - c^2 \cdot t^2}}$$

und nach $a_{x''} \cdot \tau_{x''}$ aufgelöst ergibt

$a_{x''} \cdot \tau_{x''} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot ln\left(\frac{x + c \cdot t}{x - c \cdot t}\right)$ **(A5G4)**

$$u''_x = \frac{u_x - \frac{c^2 \cdot t}{x}}{1 - \frac{u_x \cdot t}{x}} \qquad \textbf{(A5G5)}$$

$$du''_x = \frac{\left(du_x - \frac{c^2 \cdot dt \cdot x - c^2 \cdot t \cdot dx}{x^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{u_x \cdot t}{x}\right) - \left(u_x - \frac{c^2 \cdot t}{x}\right) \cdot \left(-\frac{(du_x \cdot t + u_x \cdot dt) \cdot x - u_x \cdot t \cdot dx}{x^2}\right)}{\left(1 - \frac{u_x \cdot t}{x}\right)^2}$$

$$du''_x = dt \cdot \frac{\left(\frac{du_x}{dt} - \frac{c^2 \cdot x - c^2 \cdot t \cdot \frac{dx}{dt}}{x^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{u_x \cdot t}{x}\right) + \left(u_x - \frac{c^2 \cdot t}{x}\right) \cdot \left(\frac{\left(\frac{du_x}{dt} \cdot t + u_x\right) \cdot x - u_x \cdot t \cdot \frac{dx}{dt}}{x^2}\right)}{\left(1 - \frac{u_x \cdot t}{x}\right)^2}$$

$$du''_x = dt \cdot \frac{\left(\alpha_x - \frac{c^2 \cdot x - c^2 \cdot t \cdot u_x}{x^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{u_x \cdot t}{x}\right) + \left(u_x - \frac{c^2 \cdot t}{x}\right) \cdot \left(\frac{(\alpha_x \cdot t + u_x) \cdot x - u_x{}^2 \cdot t}{x^2}\right)}{\left(1 - \frac{u_x \cdot t}{x}\right)^2}$$

$$\left(\alpha_x - \frac{c^2}{x} + \frac{c^2 \cdot t}{x^2} \cdot u_x\right) \cdot \left(1 - \frac{u_x \cdot t}{x}\right) = \alpha_x - \alpha_x \cdot \frac{u_x \cdot t}{x} - \frac{c^2}{x} + \frac{u_x \cdot c^2 \cdot t}{x^2} + \frac{c^2 \cdot t \cdot u_x}{x^2} - \frac{c^2 \cdot t^2 \cdot u_x{}^2}{x^3}$$

$$\left(u_x - \frac{c^2 \cdot t}{x}\right) \cdot \left(\frac{\alpha_x \cdot t}{x} + \frac{u_x}{x} - \frac{u_x{}^2 \cdot t}{x^2}\right) = \frac{\alpha_x \cdot t \cdot u_x}{x} + \frac{u_x{}^2}{x} - \frac{u_x{}^3 \cdot t}{x^2} - \frac{\alpha_x \cdot c^2 \cdot t^2}{x^2} - \frac{c^2 \cdot t \cdot u_x}{x^2} + \frac{u_x{}^2 \cdot t^2 \cdot c^2}{x^3}$$

von oben nach unten aufsummiert ergibt

$$= \alpha_x - \frac{c^2}{x} + \frac{u_x \cdot c^2 \cdot t}{x^2} + \frac{u_x{}^2}{x} - \frac{u_x{}^3 \cdot t}{x^2} - \frac{\alpha_x \cdot c^2 \cdot t^2}{x^2}$$

$$du''_x = dt \cdot \frac{\alpha_x - \frac{c^2}{x} + \frac{u_x \cdot c^2 \cdot t}{x^2} + \frac{u_x{}^2}{x} - \frac{u_x{}^3 \cdot t}{x^2} - \frac{\alpha_x \cdot c^2 \cdot t^2}{x^2}}{\left(1 - \frac{u_x \cdot t}{x}\right)^2}$$

$$du''_x = dt \cdot \frac{\alpha_x \cdot \left(1 - \frac{c^2 \cdot t^2}{x^2}\right) - \frac{c^2}{x} \cdot \left(1 - \frac{u_x^2}{c^2}\right) + \frac{u_x \cdot c^2 \cdot t}{x^2} \cdot \left(1 - \frac{u_x^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{u_x \cdot t}{x}\right)^2}$$

$$du''_x = dt \cdot \frac{\alpha_x \cdot \left(1 - \frac{c^2 \cdot t^2}{x^2}\right) - \frac{c^2}{x} \cdot \left(1 - \frac{u_x \cdot t}{x}\right) \cdot \left(1 - \frac{u_x^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{u_x \cdot t}{x}\right)^2} \qquad \textbf{(A5G6)}$$

$$\alpha''_x = a_{x''} \cdot \frac{du''_x}{d\left(a_{x''} \cdot \tau_{x''}\right)} = \frac{c^2}{x''} \cdot \frac{dt \cdot \frac{\alpha_x \cdot \left(1 - \frac{c^2 \cdot t^2}{x^2}\right) - \frac{c^2}{x} \cdot \left(1 - \frac{u_x \cdot t}{x}\right) \cdot \left(1 - \frac{u_x^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{u_x \cdot t}{x}\right)^2}}{dt \cdot c^2 \cdot \frac{x - u_x \cdot t}{x^2 - c^2 \cdot t^2}} \qquad \textbf{(A5G7)}$$

$$\alpha''_x = \frac{\alpha_x \cdot \left(1 - \frac{c^2 \cdot t^2}{x^2}\right) - \frac{c^2}{x} \cdot \left(1 - \frac{u_x \cdot t}{x}\right) \cdot \left(1 - \frac{u_x^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{u_x \cdot t}{x}\right)^3} \cdot \sqrt{1 - \frac{c^2 \cdot t^2}{x^2}}$$

$$\alpha''_x = \frac{\alpha_x \cdot \left(1 - \frac{c^2 \cdot t^2}{x^2}\right) - \frac{c^2}{x} \cdot \left(1 - \frac{u_x \cdot t}{x}\right) \cdot \left(1 - \frac{u_x^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{u_x \cdot t}{x}\right)^3} \cdot \sqrt{1 - \frac{c^2 \cdot t^2}{x^2}} \qquad \textbf{(A5G8)}$$

Drücken wir dies mit der Ruhbeschleunigung $a_{x''} = \frac{c^2}{x''}$ der Koordinate x'' aus

$$\alpha''_x = \alpha_x \cdot \frac{\left(1 - \frac{c^2 \cdot t^2}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1 - \frac{u_x \cdot t}{x}\right)^3} - a_{x''} \cdot \frac{\left(1 - \frac{u_x^2}{c^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{c^2 \cdot t^2}{x^2}\right)}{\left(1 - \frac{u_x \cdot t}{x}\right)^2} \qquad \textbf{(A5G9)}$$

$$u_{y''} = \frac{u_y \cdot \sqrt{1 - \frac{c^2 \cdot t^2}{x^2}}}{1 - \frac{u_x \cdot t}{x}}$$ **(A5G10)**

$$du_{y''} = \frac{d\left(u_y \cdot \sqrt{1 - \frac{c^2 \cdot t^2}{x^2}}\right) \cdot \left(1 - \frac{u_x \cdot t}{x}\right) - \left(u_y \cdot \sqrt{1 - \frac{c^2 \cdot t^2}{x^2}}\right) \cdot d\left(1 - \frac{u_x \cdot t}{x}\right)}{\left(1 - \frac{u_x \cdot t}{x}\right)^2}$$

Berechnen wir die Differentiale einzeln

$$d\left(u_y \cdot \sqrt{1 - \frac{c^2 \cdot t^2}{x^2}}\right) = du_y \cdot \sqrt{1 - \frac{c^2 \cdot t^2}{x^2}} + u_y \cdot \frac{-\left(\frac{d\left(c^2 \cdot t^2\right) \cdot x^2 - c^2 \cdot t^2 \cdot d\left(x^2\right)}{x^4}\right)}{2 \cdot \sqrt{1 - \frac{c^2 \cdot t^2}{x^2}}}$$

$$= du_y \cdot \sqrt{1 - \frac{c^2 \cdot t^2}{x^2}} + u_y \cdot \frac{-\left(\frac{c^2 \cdot 2 \cdot t \cdot dt \cdot x^2 - c^2 \cdot t^2 \cdot 2 \cdot x \cdot dx}{x^4}\right)}{2 \cdot \sqrt{1 - \frac{c^2 \cdot t^2}{x^2}}}$$

$$= dt \cdot \left(\frac{du_y}{dt} \cdot \sqrt{1 - \frac{c^2 \cdot t^2}{x^2}} - u_y \cdot \frac{c^2 \cdot t \cdot x - c^2 \cdot t^2 \cdot \frac{dx}{dt}}{x^3 \cdot \sqrt{1 - \frac{c^2 \cdot t^2}{x^2}}}\right)$$

$$= dt \cdot \left(\alpha_y \cdot \sqrt{1 - \frac{c^2 \cdot t^2}{x^2}} - u_y \cdot \frac{\frac{c^2 \cdot t}{x} - \frac{c^2 \cdot t^2}{x^2} \cdot u_x}{x \cdot \sqrt{1 - \frac{c^2 \cdot t^2}{x^2}}}\right)$$

$$\left(u_y\cdot\sqrt{1-\frac{c^2\cdot t^2}{x^2}}\right)\cdot d\left(1-\frac{u_x\cdot t}{x}\right)=\left(u_y\cdot\sqrt{1-\frac{c^2\cdot t^2}{x^2}}\right)\cdot\left(-\frac{(du_x\cdot t+u_x\cdot dt)\cdot x-u_x\cdot t\cdot dx}{x^2}\right)$$

$$=-dt\cdot\left(u_y\cdot\sqrt{1-\frac{c^2\cdot t^2}{x^2}}\right)\cdot\frac{\left(\frac{du_x}{dt}\cdot t+u_x\right)\cdot x-u_x\cdot t\cdot\frac{dx}{dt}}{x^2}$$

$$=-dt\cdot\left(u_y\cdot\sqrt{1-\frac{c^2\cdot t^2}{x^2}}\right)\cdot\frac{(\alpha_x\cdot t+u_x)\cdot x-u_x^{\;2}\cdot t}{x^2}$$

setzen wir Differentiale oben ein

$$du_{y''}=\frac{dt\cdot\left(\alpha_y\cdot\sqrt{1-\frac{c^2\cdot t^2}{x^2}}-u_y\cdot\frac{\frac{c^2\cdot t}{x}-\frac{c^2\cdot t^2}{x^2}\cdot u_x}{x\cdot\sqrt{1-\frac{c^2\cdot t^2}{x^2}}}\right)\cdot\left(1-\frac{u_x\cdot t}{x}\right)}{\left(1-\frac{u_x\cdot t}{x}\right)^2}$$

$$-\frac{\left(-dt\cdot\left(u_y\cdot\sqrt{1-\frac{c^2\cdot t^2}{x^2}}\right)\cdot\frac{(\alpha_x\cdot t+u_x)\cdot x-u_x^{\;2}\cdot t}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{u_x\cdot t}{x}\right)^2}$$

$$du_{y''}=dt\cdot\frac{\left(\alpha_y\cdot\sqrt{1-\frac{c^2\cdot t^2}{x^2}}-u_y\cdot\frac{\frac{c^2\cdot t}{x}-\frac{c^2\cdot t^2}{x^2}\cdot u_x}{x\cdot\sqrt{1-\frac{c^2\cdot t^2}{x^2}}}\right)\cdot\left(1-\frac{u_x\cdot t}{x}\right)+u_y\cdot\sqrt{1-\frac{c^2\cdot t^2}{x^2}}\cdot\frac{(\alpha_x\cdot t+u_x)\cdot x-u_x^{\;2}\cdot t}{x^2}}{\left(1-\frac{u_x\cdot t}{x}\right)^2}$$

$$du_{y''}=dt\cdot\frac{\alpha_y\cdot\left(1-\frac{u_x\cdot t}{x}\right)\cdot\sqrt{1-\frac{c^2\cdot t^2}{x^2}}+\frac{-u_y\cdot\frac{c^2\cdot t}{x}\cdot\left(1-\frac{u_x\cdot t}{x}\right)^2}{x\cdot\sqrt{1-\frac{c^2\cdot t^2}{x^2}}}+\frac{u_y\cdot x\cdot\left(1-\frac{c^2\cdot t^2}{x^2}\right)\cdot\frac{(\alpha_x\cdot t+u_x)\cdot x-u_x^{\;2}\cdot t}{x^2}}{x\cdot\sqrt{1-\frac{c^2\cdot t^2}{x^2}}}}{\left(1-\frac{u_x\cdot t}{x}\right)^2}$$

$$du_{y''} = dt \cdot \frac{\alpha_y \cdot \left(1 - \frac{u_x \cdot t}{x}\right) \cdot \sqrt{1 - \frac{c^2 \cdot t^2}{x^2}} + \frac{-u_y \cdot \frac{c^2 \cdot t}{x} \cdot \left(1 - \frac{u_x \cdot t}{x}\right)^2 + u_y \cdot x \cdot \left(1 - \frac{c^2 \cdot t^2}{x^2}\right) \cdot \frac{(\alpha_x \cdot t + u_x) \cdot x - u_x^2 \cdot t}{x^2}}{x \cdot \sqrt{1 - \frac{c^2 \cdot t^2}{x^2}}}}{\left(1 - \frac{u_x \cdot t}{x}\right)^2}$$

berechnen wir zuerst den Term $-u_y \cdot \frac{c^2 \cdot t}{x} \cdot \left(1 - \frac{u_x \cdot t}{x}\right)^2 + u_y \cdot x \cdot \left(1 - \frac{c^2 \cdot t^2}{x^2}\right) \cdot \frac{(\alpha_x \cdot t + u_x) \cdot x - u_x^2 \cdot t}{x^2} =$

$$-u_y \cdot \frac{c^2 \cdot t}{x} + 2 \cdot u_y \cdot \frac{c^2 \cdot t}{x} \cdot \frac{u_x \cdot t}{x} - u_y \cdot \frac{c^2 \cdot t}{x} \cdot \frac{u_x^2 \cdot t^2}{x^2} +$$

$$\alpha_x \cdot t \cdot u_y \cdot \left(1 - \frac{c^2 \cdot t^2}{x^2}\right) + u_x \cdot u_y - \frac{c^2 \cdot t^2}{x^2} \cdot u_x \cdot u_y - \frac{u_x^2 \cdot t}{x} \cdot u_y + \frac{c^2 \cdot t^2}{x^2} \cdot \frac{u_x^2 \cdot t}{x} \cdot u_y$$

$$= \alpha_x \cdot t \cdot u_y \cdot \left(1 - \frac{c^2 \cdot t^2}{x^2}\right) + u_x \cdot u_y \cdot \left(1 - \frac{u_x \cdot t}{x}\right) - u_y \cdot \frac{c^2 \cdot t}{x} \cdot \left(1 - \frac{u_x \cdot t}{x}\right)$$

oben eingesetzt

$$du''_y = dt \cdot \frac{\alpha_y \cdot \left(1 - \frac{u_x \cdot t}{x}\right) \cdot \sqrt{1 - \frac{c^2 \cdot t^2}{x^2}} + u_y \cdot \frac{\alpha_x \cdot t \cdot \left(1 - \frac{c^2 \cdot t^2}{x^2}\right) + u_x \cdot \left(1 - \frac{u_x \cdot t}{x}\right) - \frac{c^2 \cdot t}{x} \cdot \left(1 - \frac{u_x \cdot t}{x}\right)}{x \cdot \sqrt{1 - \frac{c^2 \cdot t^2}{x^2}}}}{\left(1 - \frac{u_x \cdot t}{x}\right)^2} \qquad \textbf{(A5G11)}$$

mit $\alpha''_y = a_{x''} \cdot \frac{du''_y}{d\,(a_{x''} \cdot \tau_{x''})}$ und $a_{x''} = \frac{c^2}{x''} = \frac{c^2}{\sqrt{x^2 - c^2 \cdot t^2}}$

$$\alpha''_y = \frac{c^2}{\sqrt{x^2 - c^2 \cdot t^2}} \cdot \frac{dt \cdot \frac{\alpha_y \cdot \left(1 - \frac{u_x \cdot t}{x}\right) \cdot \sqrt{1 - \frac{c^2 \cdot t^2}{x^2}} + u_y \cdot \frac{\alpha_x \cdot t \cdot \left(1 - \frac{c^2 \cdot t^2}{x^2}\right) + u_x \cdot \left(1 - \frac{u_x \cdot t}{x}\right) - \frac{c^2 \cdot t}{x} \cdot \left(1 - \frac{u_x \cdot t}{x}\right)}{x \cdot \sqrt{1 - \frac{c^2 \cdot t^2}{x^2}}}}{\left(1 - \frac{u_x \cdot t}{x}\right)^2}}{dt^2 \cdot c^2 \cdot \frac{x - u_x \cdot t}{x^2 - c^2 \cdot t^2}}$$

$$\alpha''_y=\frac{\alpha_y\cdot\left(1-\frac{u_x\cdot t}{x}\right)\cdot\left(1-\frac{c^2\cdot t^2}{x^2}\right)+\alpha_x\cdot\frac{u_y\cdot t}{x}\cdot\left(1-\frac{c^2\cdot t^2}{x^2}\right)+u_y\cdot\frac{c}{x}\cdot\left(\frac{u_x}{c}-\frac{c\cdot t}{x}\right)\cdot\left(1-\frac{u_x\cdot t}{x}\right)}{\left(1-\frac{u_x\cdot t}{x}\right)^3}$$

$$\alpha''_y=\alpha_y\cdot\frac{\left(1-\frac{c^2\cdot t^2}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{u_x\cdot t}{x}\right)^2}+\alpha_x\cdot\frac{\frac{u_y\cdot t}{x}\cdot\left(1-\frac{c^2\cdot t^2}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{u_x\cdot t}{x}\right)^3}+\frac{u_y\cdot\frac{c^2}{x}\cdot\left(\frac{u_x}{c^2}-\frac{t}{x}\right)}{\left(1-\frac{u_x\cdot t}{x}\right)^2}\qquad\textbf{(A5G12)}$$

$$\alpha''_y=\alpha_y\cdot\frac{\left(1-\frac{c^2\cdot t^2}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{u_x\cdot t}{x}\right)^2}+\alpha_x\cdot\frac{\frac{u_y\cdot t}{x}\cdot\left(1-\frac{c^2\cdot t^2}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{u_x\cdot t}{x}\right)^3}+\frac{u_y\cdot\frac{c^2}{x''}\cdot\left(\frac{u_x}{c^2}-\frac{t}{x}\right)\cdot\frac{x''}{x}}{\left(1-\frac{u_x\cdot t}{x}\right)^2}$$

mit der Ruhbeschleunigung $a_{x''}$ der Koordinate x'' folgt

$$\alpha''_y=\alpha_y\cdot\frac{\left(1-\frac{c^2\cdot t^2}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{u_x\cdot t}{x}\right)^2}+\alpha_x\cdot\frac{\frac{u_y\cdot t}{x}\cdot\left(1-\frac{c^2\cdot t^2}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{u_x\cdot t}{x}\right)^3}+a_{x''}\cdot\frac{u_y\cdot\left(\frac{u_x}{c^2}-\frac{t}{x}\right)\cdot\sqrt{1-\frac{c^2\cdot t^2}{x^2}}}{\left(1-\frac{u_x\cdot t}{x}\right)^2}$$

und mit der Relativgeschwindigkeit v der Koordinate x'' zum Zeitpunkt t

$$\alpha''_y=\alpha_y\cdot\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{u_x\cdot v}{c^2}\right)^2}+\alpha_x\cdot\frac{\frac{u_y\cdot v}{c^2}\cdot\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{u_x\cdot v}{c^2}\right)^3}+a_{x''}\cdot\frac{u_y\cdot\left(\frac{u_x-v}{c^2}\right)\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\left(1-\frac{u_x\cdot v}{c^2}\right)^2}$$

Anhang 1

In jedem elementaren Physikbuch findet man die folgende Gleichung für die Gravitationsbeschleunigung einer Zentralmasse M .

$$\overrightarrow{a(r)} = -\frac{\gamma\ M}{r^2} \cdot \overrightarrow{e_r} \tag{200}$$

Lässt man eine Probemasse m im Feld dieser Zentralmasse M zum Zeitpunkt $t = 0$ von der Koordinate r_0 aus mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ frei fallen so erhält man eine Gleichung die ebenfalls in vielen Büchern zu finden ist.

$$\overrightarrow{v(r)} = -\sqrt{\frac{2\ \gamma\ M}{r} - \frac{2\ \gamma\ M}{r_0}} \cdot \overrightarrow{e_r} \tag{201}$$

Eine weitere Integration führt uns dann zu der folgenden $r(t)$ Darstellung die nicht mehr so häufig anzutreffen ist.

$$r(t) = r_0 \cdot cos\left(\sqrt{\frac{2\ \gamma\ M}{r_0^3}} \cdot t - \sqrt{\frac{r(t)}{r_0}} \cdot \sqrt{1 - \frac{r(t)}{r_0}}\right)^2 \tag{202}$$

Wir sehen hier dass eine explizite Darstellung von $r(t)$ nicht möglich ist und daher $r(t)$ numerisch berechnet werden muss . Doch dieser Umstand ist sehr unbefriedigend. Wenn die Gleichungen (200) und (201) so grundlegend sind kann man vermuten, dass sich $r(t)$ zumindest harmonische schreiben lässt. Ich zeige zuerst dass man in der Tat Gleichung (202) auch folgendermaßen schreiben kann :

$$r(t) = r_0 \cdot \cos\left(\int_0^t \sqrt{\frac{2\ \gamma\ M}{r_0^2\ r(t') + r_0\ r(t')^2}}\ dt'\right)$$

Sei Gleichung (202) schon bewiesen. Setzen wir $\alpha = \sqrt{\frac{2\ \gamma\ M}{r_0^3}} \cdot t - \sqrt{\frac{r(t)}{r_0}} \cdot \sqrt{1 - \frac{r(t)}{r_0}}$

so bekommen wir $r(t) = r_0 \cdot cos\,(\alpha)^2$

Ansatz: $cos\,(\alpha)^2 = cos\,(\beta)$ (203)

Denn zu jedem α lässt sich ein β derart finden so dass Gleichung (203) gilt. Es gilt nun dieses β zu bestimmen.

$\beta = \arccos\left(cos\,(\alpha)^2\right)$ **Subsitution:** $x = cos\,(\alpha)^2$

$\beta = \arccos(x) = \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\ dy$ laut Definition von Arkuscosinus.

Subsitution: $y = cos\,(u)^2$ $dy = -2 \cdot sin\,(u) \cdot cos\,(u) \cdot du$

Integrationsgrenzen: $y = 1 \Rightarrow u = 0$ und $y = x$ mit $cos\,(u)^2 = cos\,(\alpha)^2 \Rightarrow u = \alpha$

$$\beta = \int_\alpha^0 \frac{-2 \cdot sin\,(u) \cdot cos\,(u)}{\sqrt{1 - cos\,(u)^4}}\ du = \int_0^\alpha \frac{2 \cdot sin\,(u) \cdot cos\,(u)}{\sqrt{\left(1 - cos\,(u)^2\right) \cdot \left(1 + cos\,(u)^2\right)}}\ du$$

$\beta = \int_0^\alpha \frac{2 \cdot cos\,(u)}{\sqrt{\left(1 + cos\,(u)^2\right)}}\ du$ **Subsitution:** $u = \sqrt{\frac{2\ \gamma\ M}{r_0^3}} \cdot t' - \sqrt{\frac{r(t')}{r_0}} \cdot \sqrt{1 - \frac{r(t')}{r_0}}$

Integrationsgrenzen: $u = 0 \ \Rightarrow\ t' = 0$ und $u = \alpha \ \Rightarrow\ t' = t$

wobei $u = \sqrt{\frac{2\ \gamma\ M}{r_0^3}} \cdot t' - \sqrt{\frac{r(t')}{r_0}} \cdot \sqrt{1 - \frac{r(t')}{r_0}} = \alpha = \sqrt{\frac{2\ \gamma\ M}{r_0^3}} \cdot t - \sqrt{\frac{r(t)}{r_0}} \cdot \sqrt{1 - \frac{r(t)}{r_0}}$

benutzt wurde. Setzen wir alles ein so folgt für β

$$\beta = \int_0^t \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{r(t')}{r_0}}}{\sqrt{1 + \frac{r(t')}{r_0}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2\ \gamma\ M}{r_0\ r(t')^2}} \cdot dt' = \int_0^t \sqrt{\frac{2\ \gamma\ M}{r_0^2\ r(t') + r_0\ r(t')^2}}\ dt' \tag{204}$$

Damit folgt aus den Gleichungen (203) und (204)

die Gleichung (167) $r(t) = r_0 \cdot \cos\left(\int_0^t \sqrt{\frac{2\ \gamma\ M}{r_0^2\ r(t') + r_0\ r(t')^2}}\ dt'\right)$

7.6 Anhang 6

Berechnung der Zeiten t_{01} , t_{02} , t_{11} und t_{12} Von der Koordinate r_0 wird zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Lichtstrahl L_0 zu der Koordinate r_1 geschickt. Der Lichtstrahl L_0 erreicht r_1 zum Zeitpunkt t_{01}. Für den Zeitpunkt $t = t_{01}$ gilt:

$$x_0 + x \cdot t_{01} = \frac{c^2}{a_{x_1}} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{a_{x_1}^2 \cdot t_{01}^2}{c^2}} - 1 \right) + x_1$$

nach t_{01} aufgelöst ergibt:

$$t_{01} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{a_{x_1}} \cdot \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{a_{x_1} \cdot \Delta x}{c^2} \right)} - \left(1 - \frac{a_{x_1} \cdot \Delta x}{c^2} \right) \right)$$

Für den reflektierten Lichtstrahl gilt zum Zeitpunkt $t = t_{02}$

$$x_0 + c \cdot t_{01} - c \cdot (t_{02} - t_{01}) = \frac{c^2}{a_{x_0}} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{a_{x_0}^2 \cdot t_{02}^2}{c^2}} - 1 \right) + x_0$$

$$2 \cdot c \cdot t_{01} - c \cdot t_{02} = \frac{c^2}{a_{x_0}} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{a_{x_0}^2 \cdot t_{02}^2}{c^2}} - 1 \right)$$

$$\text{oder} \quad 1 + 2 \cdot \frac{a_{x_0} \cdot t_{01}}{c} - \frac{a_{x_0} \cdot t_{02}}{c} = \sqrt{1 + \frac{a_{x_0}^2 \cdot t_{02}^2}{c^2}}$$

$$\left(\left(1 + 2 \cdot \frac{a_{x_0} \cdot t_{01}}{c} \right) - \frac{a_{x_0} \cdot t_{02}}{c} \right)^2 = 1 + \frac{a_{x_0}^2 \cdot t_{02}^2}{c^2}$$

Quadrieren wir die linke Seite und lösen nach t_{02} auf so erhalten wir

$$t_{02} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{a_{x_0}} \left(\left(1 + 2 \cdot \frac{a_{x_0} \cdot t_{01}}{c} \right) - \frac{1}{\left(1 + 2 \cdot \frac{a_{x_0} \cdot t_{01}}{c} \right)} \right)$$

mit der Gleichung für t_{01} folgt dann

$$t_{02} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{a_{x_0}} \cdot \left(\frac{1 + \frac{a_{x_0}}{a_{x_1}} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{a_{x_1} \cdot \Delta x}{c^2}} - \frac{1 - \frac{a_{x_1} \cdot \Delta x}{c^2}}{1} \right)}{1} - \frac{1}{1 + \frac{a_{x_0}}{a_{x_1}} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{a_{x_1} \cdot \Delta x}{c^2}} - \frac{1 - \frac{a_{x_1} \cdot \Delta x}{c^2}}{1} \right)} \right)$$

Von der Koordinate r_1 wird zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Lichtstrahl L_1 zu der Koordinate r_0 geschickt. Der Lichtstrahl L_1 erreicht r_0 zum Zeitpunkt t_{11}. Für den Zeitpunkt $t = t_{11}$ gilt dann in S:

$$x_1 - c \cdot t_{11} = \frac{c^2}{a_{x_0}} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{a_{x_0}^2 \cdot t_{11}^2}{c^2}} - 1 \right) + x_0$$

nach t_{11} aufgelöst ergibt:

$$t_{11} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{a_{x_0}} \cdot \left(\frac{\left(1 + \frac{a_{x_0} \cdot \Delta x}{c^2}\right)}{1} - \frac{1}{\left(1 + \frac{a_{x_0} \cdot \Delta x}{c^2}\right)} \right)$$

Den Lichtstrahl L_1 denken wir uns an der Koordinate r_0 reflektiert. L_1 möge zum Zeitpunkt t_{12} wieder an der Koordinate r_1 ankommen.Dann gilt in S zum Zeitpunkt t_{12}:

$$\frac{c^2}{a_{x_0}} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{a_{x_0}^2 \cdot t_{11}^2}{c^2}} - 1 \right) + x_0 + c \cdot (t_{12} - t_{11}) = \frac{c^2}{a_{x_1}} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{a_{x_1}^2 \cdot t_{12}^2}{c^2}} - 1 \right) + x_1$$

Lösen wir diese Gleichung nach t_{12} auf so erhalten wir

$$t_{12} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{a_{x_1}} \cdot \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{a_{x_1} \cdot \Delta x}{c^2} + \frac{a_{x_1}}{a_{x_0}} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{a_{x_0}^2 \cdot t_{11}^2}{c^2}} - 1 \right) - \frac{a_{x_1} \cdot t_{11}}{c}\right)^2} - \frac{\left(1 - \frac{a_{x_1} \cdot \Delta x}{c^2} + \frac{a_{x_1}}{a_{x_0}} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{a_{x_0}^2 \cdot t_{11}^2}{c^2}} - 1 \right) - \frac{a_{x_1} \cdot t_{11}}{c}\right)^2}{1} \right)$$

aus $\quad x_1 - c \cdot t_{11} = \frac{c^2}{a_{x_0}} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{a_{x_0}^2 \cdot t_{11}^2}{c^2}} - 1 \right) + x_0$

folgt $\quad -\frac{a_{x_1} \cdot \Delta x}{c^2} + \frac{a_{x_1}}{a_{x_0}} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{a_{x_0}^2 \cdot t_{11}^2}{c^2}} - 1 \right) = -\frac{a_{x_1} \cdot t_{11}}{c}$ $\quad$ oben eingesetzt ergibt

$$t_{12} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{a_{x_1}} \cdot \left(\frac{1}{1 - 2 \cdot \frac{a_{x_1} \cdot t_{11}}{c}} - \frac{1 - 2 \cdot \frac{a_{x_1} \cdot t_{11}}{c}}{1} \right)$$

und weiter folgt aus $\quad t_{11} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{a_{x_0}} \cdot \left(\frac{\left(1 + \frac{a_{x_0} \cdot \Delta x}{c^2}\right)}{1} - \frac{1}{\left(1 + \frac{a_{x_0} \cdot \Delta x}{c^2}\right)} \right)$

$$1-2\cdot\frac{a_{x_1}\cdot t_{11}}{c}=1-\frac{a_{x_1}}{a_{x_0}}\cdot\left(\frac{\left(1+\frac{a_{x_0}\cdot\Delta x}{c^2}\right)}{1}-\frac{1}{\left(1+\frac{a_{x_0}\cdot\Delta x}{c^2}\right)}\right)$$

und damit

$$t_{12}=\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{a_{x_1}}\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{a_{x_1}}{a_{x_0}}\cdot\left(\frac{\left(1+\frac{a_{x_0}\cdot\Delta x}{c^2}\right)}{1}-\frac{1}{\left(1+\frac{a_{x_0}\cdot\Delta x}{c^2}\right)}\right)}-\frac{1-\frac{a_{x_1}}{a_{x_0}}\cdot\left(\frac{\left(1+\frac{a_{x_0}\cdot\Delta x}{c^2}\right)}{1}-\frac{1}{\left(1+\frac{a_{x_0}\cdot\Delta x}{c^2}\right)}\right)}{1}\right)$$

7.7 Anhang 7

Näherung von Gleichung (88) und (90)

aus Gleichung(88) $\Delta\tau_{x_0} = \frac{c}{a_{x_0}} \cdot ln\left(1 + \frac{a_{x_0}}{a_{x_1}} \cdot \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{a_{x_1} \cdot \Delta x}{c^2}\right)} - \left(1 - \frac{a_{x_1} \cdot \Delta x}{c^2}\right)\right)\right)$

folgt mit der Näherung $ln\,(1+\xi) \approx \xi - \frac{1}{2} \cdot \xi^2$ für $\xi \ll 1$

$$\frac{a_{x_0} \cdot \Delta\tau_{x_0}}{c} \approx \frac{a_{x_0}}{a_{x_1}} \cdot \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{a_{x_1} \cdot \Delta x}{c^2}\right)} - \left(1 - \frac{a_{x_1} \cdot \Delta x}{c^2}\right)\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{a_{x_0}^2}{a_{x_1}^2} \cdot \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{a_{x_1} \cdot \Delta x}{c^2}\right)} - \left(1 - \frac{a_{x_1} \cdot \Delta x}{c^2}\right)\right)^2$$

oder $\frac{a_{x_1} \cdot \Delta\tau_{x_0}}{c} \approx \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{a_{x_1} \cdot \Delta x}{c^2}\right)} - \left(1 - \frac{a_{x_1} \cdot \Delta x}{c^2}\right)\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{a_{x_0}}{a_{x_1}} \cdot \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{a_{x_1} \cdot \Delta x}{c^2}\right)} - \left(1 - \frac{a_{x_1} \cdot \Delta x}{c^2}\right)\right)^2$

und mit $\frac{1}{1-x} \approx 1 + x + x^2$ und $\frac{1}{(1-x)^2} \approx 1 + 2 \cdot x + 3 \cdot x^2$ für $x << 1$

$$\frac{a_{x_1} \cdot \Delta\tau_{x_0}}{c} \approx 2 \cdot \frac{a_{x_1} \cdot \Delta x}{c^2} + \left(\frac{a_{x_1} \cdot \Delta x}{c^2}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a_{x_0}}{a_{x_1}} \cdot 4 \cdot \left(\frac{a_{x_1} \cdot \Delta x}{c^2}\right)^2$$

Ich setze $\frac{a_{x_0}}{a_{x_1}} = 1$ da dieser Term ohnehin mit Δx^2 multiplikativ verknüpft ist.

$$\frac{a_{x_1} \cdot \Delta\tau_{x_0}}{c} \approx 2 \cdot \frac{a_{x_1} \cdot \Delta x}{c^2} - \left(\frac{a_{x_1} \cdot \Delta x}{c^2}\right)^2 = 2 \cdot \frac{a_{x_1} \cdot \Delta x}{c^2} \cdot \left(1 - \frac{a_{x_1} \cdot \Delta x}{2 \cdot c^2}\right)$$

also erhalten wir Gleichung (91) $\Delta\tau_{x_0} \approx 2 \cdot \frac{\Delta x}{c} \cdot \left(1 - \frac{a_{x_1} \cdot \Delta x}{2 \cdot c^2}\right)$

aus Gleichung(90) $\Delta\tau_{x_1} = -\frac{c}{a_{x_1}} \cdot ln\left(1 - \frac{a_{x_1}}{a_{x_0}} \cdot \left(\left(1 + \frac{a_{x_0} \cdot \Delta x}{c^2}\right) - \frac{1}{\left(1 + \frac{a_{x_0} \cdot \Delta x}{c^2}\right)}\right)\right)$

folgt mit der Näherung $ln\,(1+\xi) \approx \xi - \frac{1}{2} \cdot \xi^2$ für $\xi \ll 1$

$$\frac{a_{x_1} \cdot \Delta\tau_{x_1}}{c} \approx -\left(-\frac{a_{x_1}}{a_{x_0}} \cdot \left(\frac{1 + \frac{a_{x_0} \cdot \Delta x}{c^2}}{1} - \frac{1}{1 + \frac{a_{x_0} \cdot \Delta x}{c^2}}\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{a_{x_1}^2}{a_{x_0}^2} \cdot \left(\frac{1 + \frac{a_{x_0} \cdot \Delta x}{c^2}}{1} - \frac{1}{1 + \frac{a_{x_0} \cdot \Delta x}{c^2}}\right)^2\right)$$

$$\frac{a_{x_0} \cdot \Delta\tau_{x_1}}{c} \approx \left(\frac{1 + \frac{a_{x_0} \cdot \Delta x}{c^2}}{1} - \frac{1}{1 + \frac{a_{x_0} \cdot \Delta x}{c^2}}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{a_{x_1}}{a_{x_0}} \cdot \left(\frac{1 + \frac{a_{x_0} \cdot \Delta x}{c^2}}{1} - \frac{1}{1 + \frac{a_{x_0} \cdot \Delta x}{c^2}}\right)^2$$

und mit $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x + x^2$ und $\frac{1}{(1+x)^2} \approx 1 - 2 \cdot x + 3 \cdot x^2$ für $x << 1$

$$\frac{a_{x_0} \cdot \Delta\tau_{x_1}}{c} \approx 2 \cdot \frac{a_{x_0} \cdot \Delta x}{c^2} - \left(\frac{a_{x_0} \cdot \Delta x}{c^2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{a_{x_1}}{a_{x_0}} \cdot 4 \cdot \left(\frac{a_{x_0} \cdot \Delta x}{c^2}\right)^2$$

Ich setze $\dfrac{a_{x_1}}{a_{x_0}} = 1$ da dieser Term ohnehin mit Δx^2 multiplikativ verknüpft ist.

$$\frac{a_{x_0} \cdot \Delta\tau_{x_1}}{c} \approx 2 \cdot \frac{a_{x_0} \cdot \Delta x}{c^2} + \left(\frac{a_{x_0} \cdot \Delta x}{c^2}\right)^2 = 2 \cdot \frac{a_{x_0} \cdot \Delta x}{c^2} \cdot \left(1 + \frac{a_{x_0} \cdot \Delta x}{2 \cdot c^2}\right)$$

also erhalten wir Gleichung (92) $\Delta\tau_{x_1} \approx 2 \cdot \dfrac{\Delta x}{c} \cdot \left(1 + \dfrac{a_{x_0} \cdot \Delta x}{2 \cdot c^2}\right)$